

EIN NEUES BIFURKATIONSSZENARIO:
DIE KOMBINIERTE SATTEL-KNOTEN/SOFT-MODE
BIFURKATION

Vom Fachbereich Physik
der Technischen Universität Darmstadt

zur Erlangung des Grades
eines Doktors der Naturwissenschaften
(Dr. rer. nat.)

genehmigte Dissertation von

DIPL.-PHYS. JÖRG KUGLER

aus Offenbach am Main

Referent: Prof. Dr. H. Sauermann
Korreferent: Prof. Dr. F. Kaiser

Tag der Einreichung: 12. Februar 2003
Tag der Prüfung: 5. Mai 2003

Darmstadt 2003
D17

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	3
2	Die kombinierte Sattel-Knoten/Soft-Mode Bifurkation	7
2.1	Allgemeine geometrische Analyse	7
2.1.1	Ausgangsgleichung	7
2.1.2	Sattel-Knoten Bifurkation	8
2.1.3	Soft-Mode Instabilität	10
2.1.4	Kombinierte Bifurkation	14
2.1.5	Zusammenfassung	17
2.2	Ein generisches Beispiel	19
2.2.1	Modellgleichungen	19
2.2.2	Sattel-Knoten Bifurkation	21
2.2.3	Soft-Mode Instabilität	22
2.2.4	Kombinierte Bifurkation	24
2.2.5	Grenzübergang	25
2.2.6	Bifurkationsdiagramme	26
3	Das Modellsystem	28
3.1	Normalform	28
3.2	Räumlich homogene Lösungen	30
3.3	Lineare Stabilitätsanalyse	31
3.4	Bifurkationsdiagramm	32
3.5	Transformation auf Normalkoordinaten	34
3.6	Swift-Hohenberg Form	35
3.7	Diskussion	36
4	Eigenschaften des stationären Systems	39
4.1	Quasi-Hamiltonfunktion	40
4.1.1	Darstellung in den Koordinaten u, v	40
4.1.2	Darstellung in den Koordinaten x_1, x_2	40
4.1.3	Diskussion	41

4.2	Quasi-Wirkungsfunktional	42
4.3	Literaturumfeld	43
5	Numerischer Überblick über die Lösungseigenschaften	46
6	Schwach nichtlineare Analyse	53
6.1	Periodische Lösungen in der Mittelwertmethode	53
6.2	Stabilität der periodischen Lösungen	59
6.3	Ginzburg-Landau Gleichung	62
7	Nicht-perturbative Methoden	66
7.1	Harmonische Balance	66
7.2	Variationsverfahren	71
8	Eigenschaften der lokalisierten Lösungen	77
8.1	Lösungsansatz	77
8.2	Minimierung des Funktionals J	80
9	Zusammenfassung	84
A	Koordinatentransformation	88
B	Symmetrierelationen	89
C	Eigenwerte des linearen Operators	91
D	Nützliche Identitäten	92
E	Entartete Störungstheorie	94
F	Kubischer Koeffizient der Ginzburg-Landau Gleichung	96
G	Lösungen der kubischen Gleichung knapp oberhalb der Schwelle	99
	Literaturverzeichnis	101

Kapitel 1

Einleitung

Das Interesse an Strukturbildungsprozessen in räumlich ausgedehnten, dissipativen Systemen hat in den letzten Jahrzehnten bedingt durch Fortschritte in experimenteller, numerischer und theoretischer Hinsicht über die Grenzen der Physik hinweg einen ungeheuren Aufschwung erlebt. Ausgangspunkt der theoretischen Beschreibung verschiedenster Phänomene z. B. in der Hydrodynamik, Reaktions-Diffusions-Systemen oder auch in der nichtlinearen Optik ist auf makroskopischer Ebene, auf der fluktuierende Kräfte zu vernachlässigen sind, zumeist ein Satz von deterministischen, nichtlinearen partiellen Differentialgleichungen. Ziel der Theorie ist es, die grundlegenden Mechanismen aufzuklären, aufgrund derer sich aus einem einfachen Zustand heraus bei Veränderung äußerer Parameter ein komplizierterer ausbildet.

Eine vereinheitlichte Sichtweise, wie sie etwa dem Übersichtsartikel von Cross und Hohenberg [CrHo] zu entnehmen ist, geht von der linearen Instabilität eines homogenen Zustandes in einem unendlich ausgedehnten System aus, welche entsteht, wenn ein Kontrollparameter einen gewissen kritischen Wert überschreitet. Je nach Wert des charakteristischen Wellenvektors \mathbf{q}_0 und der zugehörigen Frequenz ω_0 (Imaginärteil des kritischen Eigenwerts), die an der Schwelle auftreten, kann man eine Einteilung in drei Klassen vornehmen: (1) Instabilitäten mit $q_0 \neq 0$, $\omega_0 = 0$ führen üblicherweise zur Ausbildung räumlich periodischer, stationärer Strukturen. Für diesen Typ hat sich auch die Bezeichnung Soft-Mode Instabilität eingebürgert. In mehreren Raumdimensionen treten Superpositionen auf, so dass neben einfachen Streifenmustern beispielsweise auch quadratische Muster oder Hexagone möglich sind, sofern sie nicht durch zusätzliche Symmetriebedingungen verboten sind. (2) Hard-Mode Instabilitäten mit $q_0 = 0$, $\omega_0 \neq 0$ bewirken die Ausbildung räumlich homogener, zeitlich oszillierender Zustände. Sie besitzen mit der Hopf-Bifurkation bereits eine Entsprechung in ortsunabhängigen, niedrigdimensionalen Systemen. (3) Instabilitäten mit $q_0 \neq 0$, $\omega_0 \neq 0$ führen im einfachsten Fall zur Ausbreitung laufender Wellen. Daher wird dieser Typ bisweilen auch als Traveling-Wave Instabilität bezeichnet.

Knapp oberhalb der Schwelle ist bei einer superkritischen Instabilität im Allgemeinen eine störungstheoretische Behandlung möglich, die auf eine reduzierte Beschreibung der Systemdynamik durch Amplitudengleichungen führt [NeWh, Newe]. Ihre Form ist für jede der drei obigen Klassen universell. Die spezifischen Details des Ausgangssystems schlagen sich lediglich in den Werten der Koeffizienten nieder. In größerer Entfernung von der Schwelle kann manchmal eine Beschreibung durch Phasengleichungen erfolgen [CrNe], sofern es gelingt eine exakte Partikularlösung als Ausgangspunkt zu finden. Ansonsten existiert in diesem Gebiet jedoch kein systemübergreifender theoretischer Zugang.

Die drei erwähnten „klassischen“ Instabilitäten zeichnen sich dadurch aus, dass die Variation *eines* relevanten Parameters genügt, um eine vollständige und konsistente Darstellung des Verhaltens an der Schwelle zu geben. Es sind aber auch kompliziertere Fälle möglich, bei denen die Veränderung eines weiteren Kontrollparameters zum simultanen Auftreten verschiedener Instabilitäten, oder allgemeiner gesprochen, zur Entartung des Problems führt. Ein bekanntes Beispiel ist die Koexistenz einer Soft- und Hard-Mode Instabilität, auch bekannt unter dem Namen Turing-Hopf Instabilität. In der Parameterebene lassen sich diese Entartungspunkte als Schnittpunkte der jeweils elementaren Bifurkationslinien detektieren. Man spricht auch von Bifurkationspunkten der Kodimension Zwei oder höher.

Eine Fülle solcher Entartungspunkte ist in der Literatur studiert worden. Sie sind nicht nur unter rein mathematischen Gesichtspunkten von Interesse, sondern spielen durchaus in den Anwendungen eine Rolle. Man denke etwa an die Bedeutung der Turing-Hopf Instabilität für die Reaktionskinetik in bestimmten chemischen Systemen [Kida, Dewe]. Matthäus hat in seiner Dissertation [Matt] eine systematische Analyse von Bifurkationen höherer Kodimension in einem stark getriebenen ferromagnetischen System, das durch die dissipative Landau-Lifschitz Gleichung modelliert wird, vorgenommen und auf ihre zentrale Bedeutung hingewiesen. Die zugehörigen Bifurkationslinien bilden im Parameterraum gewissermaßen ein Gerüst, an dem die Linien der elementaren Instabilitäten aufgehängt sind. Neben vielen anderen Entartungspunkten wurde ein Szenario beschrieben, bei dem ein homogener Zustand des Systems, von dem sich aufgrund einer Instabilität vom Typ (1) räumlich periodische Muster abzweigen, selbst durch „Paarvernichtung“ abhanden kommt. Es tritt also bei speziell gewählten Parameterwerten eine Verschmelzung einer Soft-Mode Instabilität mit einer Sattel-Knoten Bifurkation der homogenen Lösungen auf. Am Entartungspunkt gilt dann $q_0 = 0$. Die hier vorliegende Arbeit ist der Analyse dieser Problemstellung, die von allgemeiner Bedeutung und nicht nur auf obiges Beispiel beschränkt ist, und ihrer Konsequenzen für die Strukturbildung gewidmet.

Es zeigt sich bald, dass eine standardisierte störungstheoretische Behandlungsmethode der Situation nicht angemessen ist. Auch mit kleineren Anpassungen oder Reparaturen der bestehenden Verfahren hat man hier keinen Erfolg. Stattdessen empfiehlt es sich, die Bedingungen, die zum Auftreten der kombinierten Sattel-Knoten/Soft-Mode Bifurkation führen, erst einmal grundsätzlich zu beleuchten. Dies

wird in Kapitel 2 geschehen. Im Rahmen der nichtlinearen Dynamik niedrigdimensionaler Systeme existieren mit der Reduktion auf die zentrale Mannigfaltigkeit und der Konstruktion von Normalformen zwei mathematisch streng fundierte Methoden, die es gestatten überflüssige Freiheitsgrade zu eliminieren und die mit einer Bifurkation verknüpften Grundgleichungen auf eine universelle und möglichst einfache Gestalt zu bringen [GuHo, GoSc]. Bei räumlich ausgedehnten Systemen lassen sich oftmals ähnliche Wege beschreiten, wenngleich man dabei häufig auf heuristische Argumente angewiesen ist. In diesem Sinne wird in dieser Arbeit zuerst eine allgemeine Theorie der kombinierten Bifurkation entwickelt. Anschließend wird ein generisches Modellsystem vorgestellt, das meiner Meinung nach sogar als eine Normalform angesehen werden kann.

In Kapitel 3 werden wir den Bezug unseres Systems zu einer reellen, verallgemeinerten Swift-Hohenberg Gleichung herstellen. In ihrer ursprünglichen Form mit einer rein kubischen Nichtlinearität stellt die Swift-Hohenberg Gleichung [SwHo] eines der fundamentalen Modelle für Instabilitäten vom Typ (1) dar. Sie beschreibt die Entstehung räumlich periodischer Muster, die innerhalb eines schmalen Frequenzbandes (bis zur Eckhaus-Instabilität) stabil sind [Eckh]. Durch die Hinzunahme eines quadratischen Terms entsteht subkritisches Verhalten. Unter bestimmten Nebenbedingungen eröffnet sich dann die Möglichkeit lokalisierter, sprich pulsförmiger Lösungen. Erste numerische Untersuchungen dazu wurden in [TML] vorgestellt. Eine mathematisch rigorose Behandlung wurde in [GILe95] begonnen und in späteren Arbeiten [BeLe], die auch Fronten umfassen, fortgesetzt. Die Autoren gewinnen ihre Resultate durch eine aufwendige Analyse homokliner und heterokliner Orbits im vierdimensionalen Phasenraum der zugehörigen stationären Gleichungen erster Ordnung (im Fall von Fronten im mitbewegten Bezugssystem). Derartige Methoden wurden früher bereits mit Erfolg auf die komplexe Ginzburg-Landau Gleichung angewendet [SaHo]. Ähnliche Techniken spielen auch in dem vor kurzem erschienen Übersichtsartikel von Coulet [Coul] eine wesentliche Rolle. Dort werden lokalisierte Strukturen und Fronten in verschiedenen Nichtgleichgewichtssystemen, die mit unserem verwandt sind, nachgewiesen. Die bei uns vorkommende Variante der Swift-Hohenberg Gleichung ist allerdings nicht nur komplizierter, sondern insofern von prinzipiell verschiedener Natur, als sie sich nicht aus einem Lyapunov-Funktional ableiten lässt.

In Bezug auf die Literatur sei noch angemerkt, dass bei der Untersuchung der Dynamik verschiedener Laser-Systeme (Zweiniveaulaser der Klassen A und C) in [LMN94, LMN95] ein Entartungspunkt existiert, der wie bei uns durch die Bedingungen $q_0 = 0$, $\omega_0 = 0$ gekennzeichnet ist. Dort treten aber bereits in einer Umgebung dieses Punktes bei Variation eines Detuning-Parameters Ω von Null verschiedene Frequenzen $\omega(\Omega)$ auf, so dass die resultierende Dynamik in der Nähe der Schwelle durch eine *komplexe* Swift-Hohenberg Gleichung beschrieben wird.

Nachdem wir uns im Kapitel 4 von der kanonischen Struktur unserer Ausgangsgleichungen im stationären Fall überzeugt haben, stellen wir in Kapitel 5 die Resultate

aus zeitabhängigen numerischen Simulationen vor. Insbesondere widmen wir dem interessanten Wechselspiel zwischen räumlich periodischen und solitären Lösungen unsere Aufmerksamkeit. In Kapitel 6 wird der Grund für das Versagen des störungstheoretischen Ansatzes in der Nähe des Entartungspunktes näher erläutert. Es wird sich herausstellen, dass in der Tat ein Wechsel des Charakters der Soft-Mode Instabilität von super- nach subkritisch dafür verantwortlich ist. Im verbleibenden Teil der Arbeit, geht es darum, möglichst pragmatische Konzepte zum Verständnis der numerischen Befunde im subkritischen Regime zu entwickeln. Über die erwähnte Wechselbeziehung mit den periodischen Lösungen werden wir in Kapitel 7 in der Lage sein, den Existenzbereich lokalisierter Lösungen zu berechnen. Kapitel 8 ist schließlich der Gestalt einzelner Pulse und ihrer Abhängigkeit von den Parametern gewidmet.

Kapitel 2

Die kombinierte Sattel-Knoten/ Soft-Mode Bifurkation

2.1 Allgemeine geometrische Analyse

Wir betrachten eine allgemeine partielle Differentialgleichung in einer räumlichen Dimension und in der Zeit. In dem dadurch beschriebenen System soll bei bestimmten Parameterwerten eine einzelne Mode instabil werden (bei verschwindender charakteristischer Frequenz). Generisch führt dies zur Entstehung stationärer, räumlich periodischer Muster. Ein interessantes Szenario tritt auf, wenn die zugrunde liegende homogene Lösung, von der sich die periodischen Lösungen an der Schwelle abzweigen, selbst durch eine Sattel-Knoten Bifurkation vernichtet wird. Das folgende Kapitel ist der detaillierten Analyse dieser Situation gewidmet.

2.1.1 Ausgangsgleichung

Gegeben sei die Bewegungsgleichung für die Dynamik eines N -komponentigen reellen Feldes $\Phi(x, t)$ in einer Raumdimension

$$\partial_t \Phi = \mathcal{F}[\mathbf{R}; \Phi, \Phi_x, \Phi_{xx}, \dots] \quad (2.1)$$

mit $x, t \in \mathbb{R} \quad \Phi, \mathcal{F} \in \mathbb{R}^N \quad \mathbf{R} \in \mathbb{R}^P \quad .$

Wir beschränken uns dabei auf Systeme mit räumlicher Inversionssymmetrie (d. h. $x \rightarrow -x$). Die Abhängigkeit von den P Systemparametern $\mathbf{R} = (R_1, R_2, \dots, R_P)$ wird hier und im Folgenden explizit vermerkt. Für das zugeordnete räumlich homogene System wird die Bezeichnung

$$\mathbf{F}(\Phi, \mathbf{R}) := \mathcal{F}[\mathbf{R}; \Phi, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \dots] \quad (2.2)$$

eingeführt. Im Hinblick auf die späteren Untersuchungen gelte ferner die Notation

$$\mathbf{X}_0 := (\Phi, \mathbf{R}) \in \mathbb{R}^{N+P} \quad \text{und} \quad \mathbf{X} := (\mathbf{X}_0, k) \in \mathbb{R}^{N+P+1} \quad (2.3)$$

mit der Wellenzahl k .

2.1.2 Sattel-Knoten Bifurkation

Bezeichne $D_\Phi \mathbf{F} = \left(\frac{\partial F_i}{\partial \Phi_j} \right)$ die Jacobi-Matrix des räumlich homogenen Systems mit dem Eigenwertproblem

$$D_\Phi \mathbf{F}(\mathbf{X}_0) \mathbf{w}^{(\nu)}(\mathbf{X}_0) = \mu^{(\nu)}(\mathbf{X}_0) \mathbf{w}^{(\nu)}(\mathbf{X}_0) \quad , \quad (2.4)$$

wobei der Index ν die N verschiedenen Zweige nummeriert. Wir setzen die Existenz einer Sattel-Knoten Bifurkation voraus und fordern daher, dass die beiden Bedingungen

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}_0^*) = \mathbf{0} \quad (2.5a)$$

$$\mu(\mathbf{X}_0^*) = 0 \quad (2.5b)$$

erfüllt sind¹. Betrachten wir zunächst den Raum, der durch die N Zustandsgrößen Φ und die P Parameter \mathbf{R} aufgespannt wird, so sind dies $N + 1$ (reelle) Gleichungen, die bei vorgegebener Funktion \mathbf{F} im Allgemeinen eine $(P - 1)$ -dimensionale Mannigfaltigkeit \mathcal{M}_* im \mathbb{R}^{N+P} festlegen. Eine Parameterdarstellung dieser Fläche sei gegeben durch²

$$\mathbf{X}_0^* = \mathbf{X}_0^*(\boldsymbol{\rho}) \quad \text{und} \quad \boldsymbol{\rho} = (\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_{P-1}) \quad (2.6)$$

mit einem vorerst beliebigen Satz unabhängiger Variablen $\boldsymbol{\rho} \in \mathbb{R}^{P-1}$. Einsetzen der Parameterdarstellung in Fixpunkt- und Eigenwertgleichung und anschließende Differentiation ergibt

$$\nabla_{\mathbf{X}_0} F_m \Big|_{\boldsymbol{\rho}} \cdot \frac{\partial \mathbf{X}_0}{\partial \rho_i} \Big|_{\boldsymbol{\rho}} = 0 \quad (2.7a)$$

$$\nabla_{\mathbf{X}_0} \mu \Big|_{\boldsymbol{\rho}} \cdot \frac{\partial \mathbf{X}_0}{\partial \rho_i} \Big|_{\boldsymbol{\rho}} = 0 \quad (2.7b)$$

$$\text{mit} \quad i = 1, 2, \dots, P - 1 \quad m = 1, 2, \dots, N \quad .$$

¹Unter den N Eigenwerten $\mu^{(\nu)}$ von $D_\Phi \mathbf{F}$ gibt es genau einen einfachen Null-Eigenwert $\mu^{(\nu_*)}$ und ansonsten nur Eigenwerte mit negativem Realteil ($N - 1$ Stück). Wir lassen den Index ν_* im Folgenden einfach weg. Außerdem existieren noch gewisse Nebenbedingungen in Form von Ungleichungen [GuHo].

²Solange aus dem Argument von $\mathbf{X}_0^*(\boldsymbol{\rho})$ und der noch einzuführenden Funktionen $\mathbf{X}_0^s(\boldsymbol{\sigma})$ und $\mathbf{X}_0^c(\boldsymbol{\tau})$ der Zusammenhang hervorgeht, werden in Zukunft die Indizes \star, s, c unterdrückt.

Wir definieren die folgenden naheliegenden Abkürzungen für die darin auftretenden Größen:

$$\mathbf{n}_m^0(\boldsymbol{\rho}) := \nabla_{\mathbf{X}_0} F_m \big|_{\boldsymbol{\rho}} \quad (2.8a)$$

$$\mathbf{n}_{N+1}^0(\boldsymbol{\rho}) := \nabla_{\mathbf{X}_0} \mu \big|_{\boldsymbol{\rho}} \quad (2.8b)$$

sowie

$$\mathbf{t}_i^0(\boldsymbol{\rho}) := \frac{\partial \mathbf{X}_0}{\partial \rho_i} \bigg|_{\boldsymbol{\rho}} . \quad (2.8c)$$

Die $P - 1$ Vektoren $\mathbf{t}_i^0(\boldsymbol{\rho}) \in \mathbb{R}^{N+P}$ sind die Tangentialvektoren an die Sattel-Knoten Fläche \mathcal{M}_\star . Sie spannen in jedem Punkt $\boldsymbol{\rho}$ den Tangentialraum $\mathcal{T}_{P-1}(\boldsymbol{\rho})$ auf. Der zugehörige Orthogonalraum $\mathcal{N}_{N+1}(\boldsymbol{\rho})$ wird gemäß obigen Gleichungen durch die $N + 1$ Vektoren $\mathbf{n}_n^0(\boldsymbol{\rho}) \in \mathbb{R}^{N+P}$ aufgespannt. Es gilt

$$\mathcal{T}_{P-1}(\boldsymbol{\rho}) \oplus \mathcal{N}_{N+1}(\boldsymbol{\rho}) = \mathbb{R}^{N+P} . \quad (2.9)$$

Wir fassen die Orthogonalitätsrelationen (2.7) noch einmal zusammen:

$$\mathbf{n}_n^0(\boldsymbol{\rho}) \cdot \mathbf{t}_i^0(\boldsymbol{\rho}) = 0 \quad (2.10)$$

$$\text{mit} \quad i = 1, 2, \dots, P - 1 \quad n = 1, 2, \dots, N + 1 .$$

Für das Weitere (siehe unten) ist es zweckmäßig, den zugrunde liegenden Raum \mathbb{R}^{N+P} durch die Hinzunahme der Wellenzahl k zu erweitern. Die Sattel-Knoten Fläche \mathcal{M}_\star liegt dann vollständig im Unterraum $k = 0$. Wir lesen nun alle Vektoren \mathbf{n}, \mathbf{t} als Vektoren im \mathbb{R}^{N+P+1} , also

$$\mathbf{n}_n(\boldsymbol{\rho}) = (\mathbf{n}_n^0(\boldsymbol{\rho}), 0) \quad \text{und} \quad \mathbf{t}_i(\boldsymbol{\rho}) = (\mathbf{t}_i^0(\boldsymbol{\rho}), 0) , \quad (2.11)$$

und halten fest, dass

$$\mathbf{n}_{N+2}(\boldsymbol{\rho}) := \left(\underbrace{0, \dots, 0}_N, \underbrace{0, \dots, 0}_P, 1 \right) \in \mathbb{R}^{N+P+1} \quad (2.12)$$

trivialerweise Normalenvektor auf der Fläche \mathcal{M}_\star in jedem ihrer Punkte $\boldsymbol{\rho}$ ist. In diesem Fall gilt

$$\mathcal{T}_{P-1}(\boldsymbol{\rho}) \oplus \mathcal{N}_{N+2}(\boldsymbol{\rho}) = \mathbb{R}^{N+P+1} . \quad (2.13)$$

Entsprechend der Aussage des Sattel-Knoten Theorems [GuHo] existieren auf der einen Seite der Sattel-Knoten Fläche \mathcal{M}_\star keine homogenen Fixpunktlösungen, auf der anderen Seite gibt es zwei (für jeden Parameter \mathbf{R} in der Nähe von \mathcal{M}_\star). Davon ist eine topologisch betrachtet ein Sattel, die andere ein stabiler Knoten.

2.1.3 Soft-Mode Instabilität

Lineare Stabilitätsanalyse

Die eben postulierte parameterabhängige Familie stabiler Fixpunktlösungen des homogenen Systems (2.2) erfüllt die Gleichung

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}_0^f) = \mathbf{0} \quad (2.14)$$

mit der Nebenbedingung (an der Stelle \mathbf{X}_0^f)

$$\operatorname{Re}(\mu^{(\nu)}) < 0 \quad \text{für} \quad \nu = 1, 2, \dots, N \quad . \quad (2.15)$$

Die Auflösung nach diesem stabilen Zweig werde mit $\Phi_f(\mathbf{R})$ bezeichnet. Eine Stabilitätsanalyse dieser Lösung gegenüber räumlich *inhomogenen* Störungen im vollen System (2.1) führt nun vermöge des Fourier-Ansatzes

$$\Phi(x, t) = \Phi_f + \mathbf{u} e^{ikx} e^{\lambda t} \quad (2.16)$$

und anschließende Linearisierung in der Abweichung \mathbf{u} auf folgendes Matrix-Eigenwertproblem³:

$$\mathbf{L}(\mathbf{X}_0, k) \mathbf{u}^{(\nu)}(\mathbf{X}_0, k) = \lambda^{(\nu)}(\mathbf{X}_0, k) \mathbf{u}^{(\nu)}(\mathbf{X}_0, k) \quad . \quad (2.17)$$

Die hierin auftretenden Größen sind wie folgt definiert:

$$\mathbf{L}(\mathbf{X}_0, k) := \sum_{\alpha=0}^{\infty} (ik)^\alpha \mathbf{L}_\alpha(\mathbf{X}_0) \quad (2.18a)$$

$$\mathbf{L}_\alpha(\mathbf{X}_0) := D_{\partial_x^\alpha \Phi} \mathcal{F} \big|_{\mathbf{X}_0} \quad . \quad (2.18b)$$

Der Index ν nummeriert dabei wieder die N verschiedenen Zweige des Eigenwertproblems. Da wir ein inversionssymmetrisches System vorausgesetzt haben, ist die quadratische Matrix $\mathbf{L}(\mathbf{X}_0, k)$ reell; d. h. die Spektren (Realteil σ und Imaginärteil ω) sind symmetrisch in k ,

$$\lambda^{(\nu)}(\mathbf{X}_0, k) = \lambda^{(\nu)}(\mathbf{X}_0, -k) \quad . \quad (2.19)$$

Differentiation der Eigenwertgleichung nach irgendeinem Parameter κ , etwa k oder σ_i (siehe später), liefert bei Unterdrückung des Index ν

$$(\partial_\kappa \mathbf{L}) \mathbf{u} + \mathbf{L} \partial_\kappa \mathbf{u} = (\partial_\kappa \lambda) \mathbf{u} + \lambda \partial_\kappa \mathbf{u} \quad (2.20)$$

bzw. nach skalarer Multiplikation mit dem jeweiligen Linkseigenvektor $\mathbf{v}^{(\nu)}$ von $\mathbf{L}(\mathbf{X}_0, k)$

$$\partial_\kappa \lambda = \mathbf{v} \cdot (\partial_\kappa \mathbf{L}) \mathbf{u} \quad . \quad (2.21)$$

Dabei wurde die Normierung $\mathbf{v}^\nu \cdot \mathbf{u}^{\nu'} = \delta^{\nu\nu'}$ benutzt.

³Im Folgenden lassen wir den Index f der Übersichtlichkeit halber wieder weg.

Instabilitätsbedingungen

Wir wollen nun voraussetzen, dass eine Instabilität vom Typ „Soft-Mode“ auftritt. Diese ist gekennzeichnet durch eine kritische Wellenzahl $k_s \neq 0$ und eine kritische Frequenz $\omega_s = 0$. Generisch weist dann der Realteil des kritischen Eigenwerts $\lambda^{(\nu_s)}$ als Funktion der Wellenzahl ein parabolisches Maximum bei $k = k_s$ auf⁴. Der Imaginärteil verschwindet aufgrund der vorausgesetzten Inversionssymmetrie sogar für alle Wellenzahlen aus einer kleinen Umgebung von k_s , so dass auch die Ableitungen des Spektrums reell sind. Unter Weglassung des Index ν_s haben wir somit

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}^s) = \mathbf{0} \quad (2.22a)$$

$$\lambda(\mathbf{X}^s) = 0 \quad (2.22b)$$

$$\partial_k \lambda(\mathbf{X}^s) = 0 \quad . \quad (2.22c)$$

Man beachte hier, dass gilt

$$\mathbf{X}^s = (\mathbf{X}_0^s, k_s) \quad \text{und} \quad \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial k} \equiv \mathbf{0} \quad . \quad (2.23)$$

Soft-Mode Mannigfaltigkeit

Man hat also $N + 2$ Gleichungen, die im Allgemeinen eine $(P - 1)$ -dimensionale Mannigfaltigkeit \mathcal{M}_s im \mathbb{R}^{N+P+1} festlegen. Im Unterschied zur Sattel-Knoten Fläche \mathcal{M}_\star liegt sie wesentlich in diesem Raum (und nicht nur im Unterraum mit $k = 0$). Eine Parameterdarstellung dieser Fläche sei gegeben durch

$$\mathbf{X}^s = \mathbf{X}^s(\boldsymbol{\sigma}) \quad \text{mit} \quad \boldsymbol{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{P-1}) \quad . \quad (2.24)$$

Wiederum setzen wir diese Darstellung in die Bedingungsgleichungen ein und differenzieren dann nach den Parametern. Man erhält

$$\nabla_{\mathbf{X}} F_m \Big|_{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \sigma_i} \Big|_{\boldsymbol{\sigma}} = 0 \quad (2.25a)$$

$$\nabla_{\mathbf{X}} \lambda \Big|_{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \sigma_i} \Big|_{\boldsymbol{\sigma}} = 0 \quad (2.25b)$$

$$\nabla_{\mathbf{X}} \partial_k \lambda \Big|_{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \sigma_i} \Big|_{\boldsymbol{\sigma}} = 0 \quad (2.25c)$$

$$\text{mit} \quad i = 1, 2, \dots, P - 1 \quad m = 1, 2, \dots, N \quad .$$

Abkürzend wählen wir die Bezeichnungen

$$\mathbf{n}_m(\boldsymbol{\sigma}) := \nabla_{\mathbf{X}} F_m \Big|_{\boldsymbol{\sigma}} \quad (2.26a)$$

$$\mathbf{n}_{N+1}(\boldsymbol{\sigma}) := \nabla_{\mathbf{X}} \lambda \Big|_{\boldsymbol{\sigma}} \quad (2.26b)$$

$$\mathbf{n}_{N+2}(\boldsymbol{\sigma}) := \nabla_{\mathbf{X}} \partial_k \lambda \Big|_{\boldsymbol{\sigma}} \quad (2.26c)$$

⁴Die anderen Äste des Spektrums besitzen negativem Realteil.

sowie

$$\mathbf{t}_i(\boldsymbol{\sigma}) := \left. \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \sigma_i} \right|_{\boldsymbol{\sigma}} . \quad (2.26d)$$

Ganz analog zum vorigen Abschnitt erkennen wir nun in den Vektoren $\mathbf{n}_r(\boldsymbol{\sigma})$ und $\mathbf{t}_i(\boldsymbol{\sigma})$ die $N + 2$ Normalenvektoren bzw. die $P - 1$ Tangentenvektoren an die Soft-Mode Mannigfaltigkeit \mathcal{M}_s (jeweils im Punkt $\boldsymbol{\sigma}$). Es gilt wieder

$$\mathcal{T}_{P-1}(\boldsymbol{\sigma}) \oplus \mathcal{N}_{N+2}(\boldsymbol{\sigma}) = \mathbb{R}^{N+P+1} . \quad (2.27)$$

Zusammenfassend lassen sich die Orthogonalitätsrelationen (2.25) diesmal schreiben als

$$\mathbf{n}_r(\boldsymbol{\sigma}) \cdot \mathbf{t}_i(\boldsymbol{\sigma}) = 0 \quad (2.28)$$

$$\text{mit} \quad i = 1, 2, \dots, P - 1 \quad r = 1, 2, \dots, N + 2 .$$

Zur Verdeutlichung der nun folgenden Überlegungen schreiben wir dieses homogene, lineare Gleichungssystem noch einmal in Matrix-Form. Wir verwenden dazu die Darstellung

$$\mathbf{n}_m(\boldsymbol{\sigma}) = (\nabla_{\Phi} F_m, \nabla_{\mathbf{R}} F_m, 0)_{\boldsymbol{\sigma}} \quad (2.29a)$$

$$\mathbf{n}_{N+1}(\boldsymbol{\sigma}) = (\nabla_{\Phi} \lambda, \nabla_{\mathbf{R}} \lambda, 0)_{\boldsymbol{\sigma}} \quad (2.29b)$$

$$\mathbf{n}_{N+2}(\boldsymbol{\sigma}) = (\nabla_{\Phi} \partial_k \lambda, \nabla_{\mathbf{R}} \partial_k \lambda, \frac{\partial^2 \lambda}{\partial k^2})_{\boldsymbol{\sigma}} , \quad (2.29c)$$

wobei wir schon die Eigenschaften $\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial k} \equiv \mathbf{0}$ und $\left. \frac{\partial \lambda}{\partial k} \right|_{\boldsymbol{\sigma}} = 0$ benutzt haben. Damit lautet das Gleichungssystem (2.28) wie folgt:

$$\begin{pmatrix} \nabla_{\Phi} F_1 & \nabla_{\mathbf{R}} F_1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \nabla_{\Phi} F_N & \nabla_{\mathbf{R}} F_N & 0 \\ \nabla_{\Phi} \lambda & \nabla_{\mathbf{R}} \lambda & 0 \\ \nabla_{\Phi} \partial_k \lambda & \nabla_{\mathbf{R}} \partial_k \lambda & \frac{\partial^2 \lambda}{\partial k^2} \end{pmatrix}_{\boldsymbol{\sigma}} \begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_{N+P} \\ t_{N+P+1} \end{pmatrix}_{\boldsymbol{\sigma}} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} . \quad (2.30)$$

Die Matrix hat die Dimension $(N + P + 1) \times (N + 2)$. Stellen wir uns auf den Standpunkt, dass ihre Koeffizienten vorgegebene Größen sind, so können wir obige Gleichung als Bestimmungsgleichung für die Tangentenvektoren $\mathbf{t}_i(\boldsymbol{\sigma})$ auffassen. Der Rang der Matrix ist im Allgemeinen $N + 2$. Folglich ist die Dimension des Kerns $P - 1$, und damit gibt es in Übereinstimmung mit dem bisher Gesagten $P - 1$ linear unabhängige Tangentenvektoren $\mathbf{t}_i(\boldsymbol{\sigma})$ als Lösungen des Gleichungssystems (der Index i wird hier in den Gleichungen unterdrückt).

Untermannigfaltigkeit $k = 0$

Die Soft-Mode Bifurkationsfläche \mathcal{M}_s liegt im Raum \mathbb{R}^{N+P+1} und wird von der Gesamtheit der „Ortsvektoren“ $\mathbf{X}(\boldsymbol{\sigma}) = (\Phi(\boldsymbol{\sigma}), \mathbf{R}(\boldsymbol{\sigma}), k(\boldsymbol{\sigma}))$ aufgespannt. Betrachten wir nun die Projektion dieser Mannigfaltigkeit in den Raum \mathbb{R}^{N+P} , welche durch die Vektoren $\mathbf{X}_0(\boldsymbol{\sigma}) = (\Phi(\boldsymbol{\sigma}), \mathbf{R}(\boldsymbol{\sigma}))$ gegeben ist. Diese Untermannigfaltigkeit werde mit \mathcal{M}_s^0 bezeichnet. Sie ist wie die Mannigfaltigkeit \mathcal{M}_s selbst $(P-1)$ -dimensional, denn für jeden Wert $\boldsymbol{\sigma}$ existieren im Allgemeinen $P-1$ linear unabhängige Tangentenvektoren $\mathbf{t}_i^0(\boldsymbol{\sigma})$. Zum Beweis dieser Aussage machen wir den folgenden Lösungsansatz für das volle System (2.30): Wir wählen die projizierten Vektoren $\mathbf{t}_i^0(\boldsymbol{\sigma})$ als Lösungen des reduzierten Gleichungssystems der Dimension $(N+P) \times (N+1)$

$$\begin{pmatrix} \nabla_{\Phi} F_1 & \nabla_{\mathbf{R}} F_1 \\ \vdots & \vdots \\ \nabla_{\Phi} F_N & \nabla_{\mathbf{R}} F_N \\ \nabla_{\Phi} \lambda & \nabla_{\mathbf{R}} \lambda \end{pmatrix}_{\boldsymbol{\sigma}} \begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_{N+P} \end{pmatrix}_{\boldsymbol{\sigma}} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.31)$$

Hierbei gelten wie üblich die Bezeichnungen

$$\mathbf{t}^0 = (t_1, t_2, \dots, t_{N+P}) \quad \text{und} \quad \mathbf{t} = (\mathbf{t}^0, t_{N+P+1}) \quad (2.32)$$

Der Rang dieser Untermatrix ist im Allgemeinen $N+1$, so dass sich $P-1$ linear unabhängige Lösungsvektoren $\mathbf{t}_i^0(\boldsymbol{\sigma})$ ergeben. Unter ihnen lassen sich durch Linearkombination $P-2$ Vektoren $\mathbf{t}_j^0(\boldsymbol{\sigma})$ finden, die auch noch auf dem projizierten Normalenvektor $\mathbf{n}_{N+2}^0(\boldsymbol{\sigma}) = (\nabla_{\Phi} \partial_k \lambda, \nabla_{\mathbf{R}} \partial_k \lambda)_{\boldsymbol{\sigma}}$ senkrecht stehen, sprich die zusätzlichen Gleichungen

$$\mathbf{n}_{N+2}^0(\boldsymbol{\sigma}) \cdot \mathbf{t}_j^0(\boldsymbol{\sigma}) = 0 \quad \text{für} \quad j = 1, 2, \dots, P-2 \quad (2.33)$$

erfüllen. Insgesamt hat man also das homogene $(N+P) \times (N+2)$ -System⁵

$$\begin{pmatrix} \nabla_{\Phi} F_1 & \nabla_{\mathbf{R}} F_1 \\ \vdots & \vdots \\ \nabla_{\Phi} F_N & \nabla_{\mathbf{R}} F_N \\ \nabla_{\Phi} \lambda & \nabla_{\mathbf{R}} \lambda \\ \nabla_{\Phi} \partial_k \lambda & \nabla_{\mathbf{R}} \partial_k \lambda \end{pmatrix}_{\boldsymbol{\sigma}} \begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_{N+P} \end{pmatrix}_{\boldsymbol{\sigma}} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.34)$$

für $P-2$ linear unabhängige Vektoren $\mathbf{t}_j^0(\boldsymbol{\sigma})$. Folglich muss gelten:

$$\mathbf{n}_{N+2}^0(\boldsymbol{\sigma}) \cdot \mathbf{t}_i^0(\boldsymbol{\sigma}) \begin{cases} = 0 & \text{für } i = 1, 2, \dots, P-2 \\ \neq 0 & \text{für } i = P-1 \end{cases} \quad (2.35)$$

⁵Der Rang dieses Systems ist im Allgemeinen $N+2$, zumindest solange man sich nicht auf der Schnittmannigfaltigkeit \mathcal{M}_c befindet (siehe unten).

Bei gegebener Projektion $\mathbf{t}_i^0(\boldsymbol{\sigma})$ sind nun aber auch bereits die vollen Vektoren $\mathbf{t}_i(\boldsymbol{\sigma})$ festgelegt, denn die k -Komponente ergibt sich gemäß (2.30) aus⁶

$$t_{i,N+P+1}(\boldsymbol{\sigma}) = -\frac{\mathbf{n}_{N+2}^0(\boldsymbol{\sigma}) \cdot \mathbf{t}_i^0(\boldsymbol{\sigma})}{\partial_k^2 \lambda|_{\boldsymbol{\sigma}}} \begin{cases} = 0 & \text{für } i = 1, 2, \dots, P-2 \\ \neq 0 & \text{für } i = P-1 \end{cases} . \quad (2.36)$$

Das bedeutet, einer der $P-1$ Tangentenvektoren $\mathbf{t}_i(\boldsymbol{\sigma})$ an die Soft-Mode Mannigfaltigkeit \mathcal{M}_s besitzt stets eine Komponente in Richtung k . Insgesamt ist damit das Gleichungssystem (2.30) erfüllt und die Behauptung gezeigt.

2.1.4 Kombinierte Bifurkation

Schnittmannigfaltigkeit

Wir betrachten jetzt das Zusammentreffen von Sattel-Knoten und Soft-Mode Bifurkation. Dies passiert auf der Schnittmenge

$$\mathcal{M}_c = \mathcal{M}_\star \cap \mathcal{M}_s , \quad (2.37)$$

auf der die Bedingungsgleichungen (2.5) und (2.22) für die jeweiligen Bifurkationen simultan erfüllt sind. Diese sind jedoch nicht unabhängig: Zunächst sind die beiden Fixpunktgleichungen (2.5a) und (2.22a) identisch. Weiterhin bemerken wir, dass für $k=0$ wegen

$$\mathbf{L}(\mathbf{X}_0, 0) = \mathbf{L}_0(\mathbf{X}_0) = D_{\Phi} \mathbf{F}|_{\mathbf{X}_0} \quad (2.38)$$

auch die beiden Eigenwertgleichungen (2.4) und (2.17) ineinander übergehen, und somit

$$\lambda(\mathbf{X}_0, 0) = \mu(\mathbf{X}_0) . \quad (2.39)$$

Nach Voraussetzung (2.5b) hat aber die Jacobi-Matrix $D_{\Phi} \mathbf{F}$ auf der Sattel-Knoten Fläche \mathcal{M}_\star gerade einen einfachen Eigenwert Null. Das impliziert

$$\lambda(\mathbf{X}_0^\star, 0) = 0 \quad (2.40)$$

auf der gesamten Sattel-Knoten Fläche \mathcal{M}_\star und insbesondere der „Schnittlinie“ \mathcal{M}_c . Andererseits soll auf der Soft-Mode Fläche \mathcal{M}_s (einschließlich \mathcal{M}_c) nur eine einzige Mode k_s marginal stabil sein. Daraus folgt zwingend, dass die Koexistenz der beiden Bifurkationen nur möglich ist, falls die wichtige Eigenschaft⁷

$$k_c \equiv 0 \quad (2.41)$$

⁶Der Ausdruck ist aufgrund der Nebenbedingung $\partial_k^2 \lambda|_{\boldsymbol{\sigma}} < 0$ auf $\mathcal{M}_s \setminus \mathcal{M}_c$ stets wohldefiniert. Auf der Schnittmenge \mathcal{M}_c ist er wegen $\mathbf{n}_{N+2}^0(\boldsymbol{\sigma})|_{\mathcal{M}_c} = \mathbf{0}$ und $\partial_k^2 \lambda|_{\mathcal{M}_c} = 0$ durch den entsprechenden Limes zu ersetzen. Die Aussage von Gleichung (2.36) bleibt dabei erhalten (siehe Seite 16 f).

⁷Um zu kennzeichnen, dass wir uns auf der Schnittmannigfaltigkeit befinden, schreiben wir hier k_c anstatt k_s .

auf der gesamten Schnittmenge \mathcal{M}_c gilt. Weiterhin hat die Symmetrie des Spektrums ($k \rightarrow -k$) für $k_c = 0$ einige Konsequenzen. Zunächst verschwinden dort alle ungeraden Ableitungen nach der Wellenzahl:

$$\partial_k^{2l+1} \lambda(\mathbf{X}_0, 0) = 0 \quad \text{für} \quad l = 0, 1, 2, \dots \quad (2.42)$$

Die Fixpunktlösung \mathbf{X}_0 erfährt beim Durchschreiten der Soft-Mode Fläche \mathcal{M}_s definitionsgemäß einen Stabilitätswechsel. Im Grenzfall, dass wir die Schnittlinie \mathcal{M}_c auf der Sattel-Knoten Fläche \mathcal{M}_\star überqueren, bedeutet das, dass die zweite Ableitung des Spektrums genau dort ihr Vorzeichen wechseln muss:

$$\partial_k^2 \lambda(\mathbf{X}_0^c, 0) = 0 \quad . \quad (2.43)$$

Insgesamt besitzt das Spektrum auf der Schnittmenge \mathcal{M}_c damit einen (negativen) k^4 -förmigen Verlauf. Siehe dazu auch die Abbildung 2.2 auf Seite 19. Es verbleiben nun als unabhängige Bedingungen für die kombinierte Bifurkation⁸

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}^c) = \mathbf{0} \quad (2.44a)$$

$$\lambda(\mathbf{X}^c) = 0 \quad (2.44b)$$

$$\partial_k^2 \lambda(\mathbf{X}^c) = 0 \quad (2.44c)$$

$$k_c = 0 \quad . \quad (2.44d)$$

Dies sind $N + 3$ Gleichungen für $N + P + 1$ Unbekannte, so dass generisch $P - 2$ unabhängige Variablen übrig bleiben. Die Schnittmenge \mathcal{M}_c besitzt also die Dimension $P - 2$. Eine Parameterdarstellung dieser „kritischen“ Mannigfaltigkeit lautet

$$\mathbf{X}^c = \mathbf{X}^c(\boldsymbol{\tau}) \quad \text{mit} \quad \boldsymbol{\tau} = (\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{P-2}) \quad . \quad (2.45)$$

Der Parametersatz $\boldsymbol{\tau} \in \mathbb{R}^{P-2}$ ist vorerst wieder beliebig wählbar. Erneut setzen wir die Parameterdarstellung in die Bedingungsgleichungen ein und differenzieren anschließend nach den Parametern⁹. Wir erhalten als Resultat die Orthogonalitätsbedingungen

$$\mathbf{n}_s(\boldsymbol{\tau}) \cdot \mathbf{t}_j(\boldsymbol{\tau}) = 0 \quad (2.46)$$

$$\text{mit} \quad j = 1, 2, \dots, P - 2 \quad s = 1, 2, \dots, N + 3 \quad .$$

Darin stellen die Vektoren

$$\mathbf{n}_m(\boldsymbol{\tau}) := \nabla_{\mathbf{X}} F_m \big|_{\boldsymbol{\tau}} \quad (2.47a)$$

$$\mathbf{n}_{N+1}(\boldsymbol{\tau}) := \nabla_{\mathbf{X}} \lambda \big|_{\boldsymbol{\tau}} \quad (2.47b)$$

$$\mathbf{n}_{N+2}(\boldsymbol{\tau}) := \nabla_{\mathbf{X}} \partial_k^2 \lambda \big|_{\boldsymbol{\tau}} \quad (2.47c)$$

$$\mathbf{n}_{N+3}(\boldsymbol{\tau}) := (\mathbf{0}, 1) \quad (2.47d)$$

⁸Die Bedingung $\partial_k \lambda(\mathbf{X}^c) = 0$ ist eine Folge von $\lambda(\mathbf{X}^c) = 0$ und $k_c = 0$ und muss auf der Schnittmenge durch $\partial_k^2 \lambda(\mathbf{X}^c) = 0$ ersetzt werden.

⁹Die explizite Bedingung $k_c = 0$ lässt sich auch schreiben als $C(\mathbf{X}^c) = 0$ mit $C(\mathbf{X}) := k$.

und

$$\mathbf{t}_j(\boldsymbol{\tau}) := \left. \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \tau_j} \right|_{\boldsymbol{\tau}} \quad (2.47e)$$

die Normalenvektoren ($N + 3$ Stück) bzw. die Tangentenvektoren ($P - 2$ Stück) an die Kombinationsmannigfaltigkeit \mathcal{M}_c dar, welche ganz im Unterraum $k = 0$ liegt. Oder mit $\partial_k \lambda|_{\boldsymbol{\tau}} = \partial_k^3 \lambda|_{\boldsymbol{\tau}} = 0$ als Matrizengleichung geschrieben:

$$\begin{pmatrix} \nabla_{\Phi} F_1 & \nabla_{\mathbf{R}} F_1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \nabla_{\Phi} F_N & \nabla_{\mathbf{R}} F_N & 0 \\ \nabla_{\Phi} \lambda & \nabla_{\mathbf{R}} \lambda & 0 \\ \nabla_{\Phi} \partial_k^2 \lambda & \nabla_{\mathbf{R}} \partial_k^2 \lambda & 0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix}_{\boldsymbol{\tau}} \begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_{N+P} \\ t_{N+P+1} \end{pmatrix}_{\boldsymbol{\tau}} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.48)$$

Im Fall der Schnittmannigfaltigkeit lautet also die Vollständigkeitsrelation für die Tangential- und Normalräume

$$\mathcal{T}_{P-2}(\boldsymbol{\tau}) \oplus \mathcal{N}_{N+3}(\boldsymbol{\tau}) = \mathbb{R}^{N+P+1} \quad (2.49)$$

Geometrie in der Umgebung der Schnittmannigfaltigkeit

Wir haben bereits einige der Konsequenzen aus der Symmetrie des Spektrums in k erwähnt. Aus dem gleichen Grund verschwinden außerdem die gemischten Ableitungen

$$\nabla_{\mathbf{X}_0} \partial_k \lambda(\mathbf{X}_0, 0) = \mathbf{0} \quad (2.50)$$

und deshalb in Verbindung mit (2.43) auch der Vektor

$$(\nabla_{\mathbf{X}_0} \partial_k \lambda, \partial_k^2 \lambda)_{\boldsymbol{\tau}} = \mathbf{0} \quad (2.51)$$

Das heißt, in dem Gleichungssystem (2.30) zur Bestimmung der Tangentialvektoren $\mathbf{t}_i(\boldsymbol{\sigma})$ an die Soft-Mode Fläche tritt für „ $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\tau}$ “ eine Entartung auf¹⁰. Die projizierten Vektoren $\mathbf{t}_i^0(\boldsymbol{\sigma})$ bleiben jedoch weiterhin durch das reduzierte System (2.31) bestimmt. Wir stellen fest, dass diese Bestimmungsgleichungen bei „ $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\tau}$ “ identisch sind mit den Bestimmungsgleichungen (2.7) für die Tangentialvektoren an die Sattel-Knoten Fläche. Wir erhalten somit folgende zentrale Aussage:

Theorem: Die projizierte Soft-Mode Mannigfaltigkeit \mathcal{M}_s^0 und die Sattel-Knoten Mannigfaltigkeit \mathcal{M}_{\star} *berühren* sich in der Schnittmenge \mathcal{M}_c , d. h. ihre Tangentialräume stimmen für alle Punkte $\mathbf{X}(\boldsymbol{\tau}) \in \mathcal{M}_c$ überein.

¹⁰Wir meinen damit genauer alle Paare von Koordinaten $\boldsymbol{\sigma}$ und $\boldsymbol{\tau}$, für die $\mathbf{X}^s(\boldsymbol{\sigma}) = \mathbf{X}^c(\boldsymbol{\tau})$.

Betrachten wir nun noch kurz das Verhalten der k -Komponenten der vollen Tangentenvektoren $\mathbf{t}_i(\boldsymbol{\sigma})$ im Grenzfall „ $\boldsymbol{\sigma} \rightarrow \boldsymbol{\tau}$ “ (das bedeutet $k_s \rightarrow 0$). Die Schnittmenge \mathcal{M}_c haben wir durch $P - 2$ Variablen τ_j parametrisiert. Für Punkte $\mathbf{X}(\boldsymbol{\sigma})$ auf der $(P - 1)$ -dimensionalen Soft-Mode Fläche \mathcal{M}_s führen wir in der Umgebung der Schnittlinie eine Transformation auf folgende Koordinaten durch:

$$\sigma_i = \begin{cases} \tau_i & \text{für } i = 1, 2, \dots, P - 2 \\ k_s & \text{für } i = P - 1 \end{cases} \quad (2.52)$$

Man beachte, dass die Soft-Mode Fläche \mathcal{M}_s wesentlich im Raum \mathbb{R}^{N+P+1} liegt und sich nicht in den \mathbb{R}^{N+P} einbetten lässt. Die obige Wahl der Parameter wird durch die Fallstudie im Abschnitt 2.2 unterstützt. Es ist plausibel anzunehmen, dass sie auch im allgemeinen Fall „in der Nähe“ der Schnittmenge \mathcal{M}_c (also für kleines k_s) stets möglich ist. Dann gilt für Punkte $\mathbf{X}(\boldsymbol{\sigma}) \in \mathcal{M}_s$ die Darstellung

$$\mathbf{X}(\boldsymbol{\sigma}) = (\mathbf{X}_0(\boldsymbol{\tau}, k_s), k_s) \quad , \quad (2.53)$$

und für die $P - 1$ Tangentialvektoren $\mathbf{t}_i(\boldsymbol{\sigma}) = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \sigma_i} \Big|_{\boldsymbol{\sigma}}$ folgt wie in (2.36) die Aussage

$$\mathbf{t}_i(\boldsymbol{\sigma}) = \begin{cases} \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \tau_i} \Big|_{\boldsymbol{\sigma}} = \left(\frac{\partial \mathbf{X}_0}{\partial \tau_i} \Big|_{\boldsymbol{\sigma}}, 0 \right) = (\mathbf{t}_i^0(\boldsymbol{\sigma}), 0) & \text{für } i = 1, 2, \dots, P - 2 \\ \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial k_s} \Big|_{\boldsymbol{\sigma}} = \left(\frac{\partial \mathbf{X}_0}{\partial k_s} \Big|_{\boldsymbol{\sigma}}, 1 \right) = (\mathbf{t}_{P-1}^0(\boldsymbol{\sigma}), 1) & \text{für } i = P - 1 \end{cases} \quad (2.54)$$

2.1.5 Zusammenfassung

Wir haben die Konsequenzen aus der Koexistenz von Sattel-Knoten Bifurkationen und einfachen räumlichen Instabilitäten vom Typ „Soft-Mode“ unter sehr allgemeinen Voraussetzungen untersucht. Zur vollständigen Aufklärung der Zusammenhänge mit den Hilfsmitteln der abstrakten Bifurkationstheorie musste der Vektorraum aus Zustandsvariablen und Parametern um eine Dimension, nämlich die zur Instabilität gehörige Wellenzahl k , erweitert werden. Die Bedingungsgleichungen für die jeweiligen elementaren Bifurkationen definieren in diesem Raum die beiden (Hyper-) Flächen \mathcal{M}_* und \mathcal{M}_s . Projiziert man sie auf die Koordinatenebene $k = 0$, so *berühren* sich die Projektionen in der Schnittmenge \mathcal{M}_c . In der Praxis interessiert man sich meist nur für den Parameterraum, zu dem man durch nochmalige Projektion gelangt. Die Berührungseigenschaft bleibt dabei generisch erhalten, so dass man sich die Geometrie wie in der schematischen Darstellung für $P = 3$ in Abbildung 2.1 vorstellen kann. Die kombinierte Bifurkation hat die Kodimension 2, d. h. es sind mindestens zwei unabhängige Parameter notwendig, um sie zu generieren. Man erhält diese beiden *relevanten* Bifurkationsparameter im Rahmen unserer Analyse *lokal* durch zwei geeignete Linearkombinationen aus den ursprünglichen Systemparametern. Wählt man einen beliebigen Punkt \mathbf{R}_c in der Schnittmenge aus, so sind ihm die beiden relevanten Richtungen \mathbf{e}_n und \mathbf{e}_t in der Ebene \mathcal{E}_c zugeordnet. Die restlichen Parameterkombinationen spannen die Schnittmannigfaltigkeit \mathcal{M}_c orthogonal

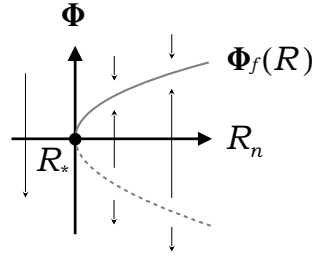
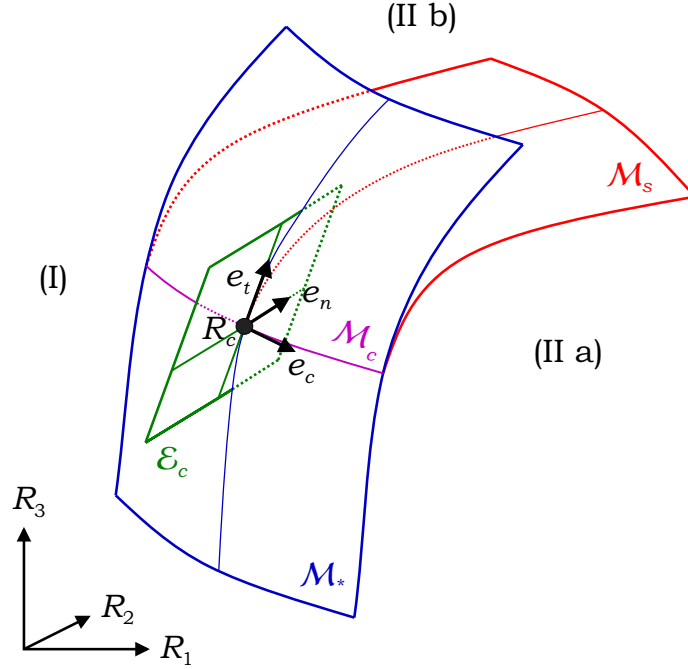


Abbildung 2.1: Geometrie der (projizierten) Bifurkationsflächen im Parameterraum ($P = 3$). Die beiden Bereiche (I) und (II) werden durch die Sattel-Knoten Fläche \mathcal{M}_\star separiert. Im Gebiet (I) existiert keine homogene Fixpunktlösung, im Gebiet (II) gibt es zwei (für jeden Parameterpunkt \mathbf{R} in der Nähe von \mathcal{M}_\star). Einer der beiden Lösungswege verhält sich stabil hinsichtlich räumlich homogener Störungen, der andere instabil. Diese Sattel-Knoten Bifurkation ist noch einmal schematisch in der Abbildung darunter dargestellt. Dabei repräsentiert \mathbf{R}_\star einen beliebigen Punkt in \mathcal{M}_\star und R_n eine dazu senkrechte Koordinate. $\Phi_f(\mathbf{R})$ bezeichnet dann die parameterabhängige Familie homogener Lösungen im Gebiet (II). Der homogen stabile Lösungsweig (durchgezogen gezeichnet) kann nun jedoch durch inhomogene Störungen im räumlich ausgedehnten System destabilisiert werden, was an der Soft-Mode Fläche \mathcal{M}_s passiert und das Gebiet (II) weiter unterteilt. Die beiden Flächen \mathcal{M}_\star und \mathcal{M}_s berühren sich in der Schnittlinie \mathcal{M}_c . An den Punkt \mathbf{R}_c auf der Linie ist ein lokales Koordinatensystem wie folgt angeheftet: Während der Vektor \mathbf{e}_n senkrecht auf \mathcal{M}_\star und damit auch \mathcal{M}_s steht, ist \mathbf{e}_t ein simultaner Tangentenvektor an die beiden Flächen. Beide Vektoren sind normal zur Schnittlinie \mathcal{M}_c mit dem Richtungsvektor \mathbf{e}_c und spannen die Ebene \mathcal{E}_c auf.

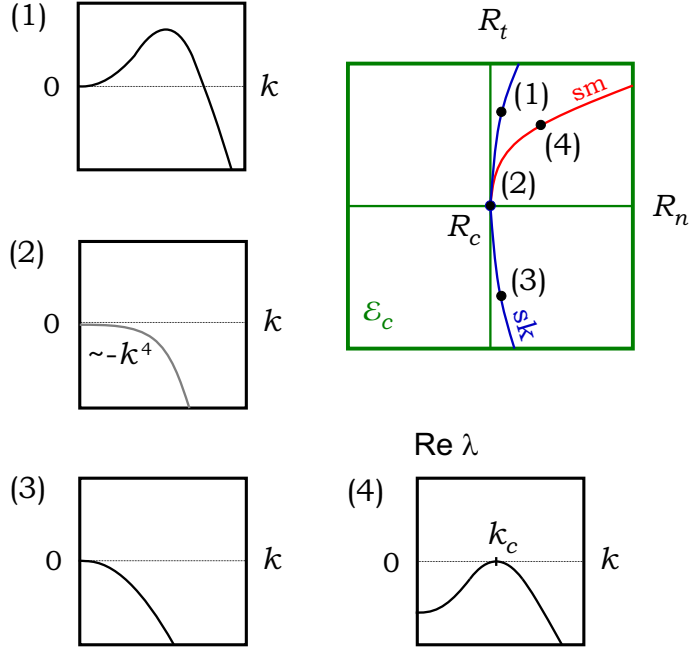


Abbildung 2.2: Eigenwertspektren des linearen Operators an verschiedenen Punkten der Koordinatenebene \mathcal{E}_c aus Abbildung 2.1 (gezeigt ist jeweils nur der kritische Ast des Spektrums). Auf der Soft-Mode Linie sm existiert ein quadratisches Maximum bei von Null verschiedener kritischer Wellenzahl k_c . Im Berührungspunkt \mathbf{R}_c von Soft-Mode und Sattel-Knoten Linie sk verhält sich das Maximum wie $\lambda \sim -k^4$. Bei Annäherung der jeweiligen Koordinatenpunkte gehen die Spektren stetig ineinander über. Insbesondere wächst k_c von Null ausgehend monoton an, wenn man sich auf der Bifurkationslinie sm von \mathbf{R}_c fortbewegt.

zu \mathcal{E}_c auf¹¹. Das lineare Eigenwertspektrum besitzt in \mathbf{R}_c zwingenderweise einen quartischen Verlauf bei verschwindender kritischer Wellenzahl. Das ist in Abbildung 2.2 noch einmal dargestellt.

2.2 Ein generisches Beispiel

2.2.1 Modellgleichungen

Der bislang entwickelte formale Apparat lässt sich im Prinzip auf beliebig komplizierte Ausgangsgleichungen anwenden, um die besprochene entartete Bifurkation zu detektieren. Die konkrete Auswertung muss dann im letzten Schritt im Allgemeinen numerisch erfolgen. Da manche der Schlussfolgerungen aus dem vorigen Abschnitt

¹¹Im Minimalfall $P = 2$ ist die Schnittmenge ein Punkt, im hier gezeichneten Fall $P = 3$ ist sie eine einparametrische Kurve.

etwas abstrakt erscheinen, ist es sinnvoll, die Überlegungen noch einmal an dem einfacheren, zweikomponentigen Modellsystem

$$U_t = G(U) - a U_{xx} + b V_{xx} \quad (2.55a)$$

$$V_t = -V - U_{xx} + V_{xx} \quad (2.55b)$$

zu illustrieren, welches bereits in [Kugl] vorgeschlagen wurde. Die Funktion $G(U)$ bezeichnet eine Potenzreihe in U , die mit der Normalform der Sattel-Knoten Bifurkation startet. Vorerst begnügen wir uns mit den Termen der niedrigsten Ordnung:

$$G(U) = \mu - U^2 \quad (2.56)$$

Die Zustandsvariablen sind hier durch $\Phi = (U, V)$ gegeben und die (reellen) Parameter durch $\mathbf{R} = (\mu, a, b)$. Es ist also $N = 2$ und $P = 3$, und der durch die Vektoren

$$\mathbf{X} := (\Phi, \mathbf{R}, k) = (U, V, \mu, a, b, k) \quad (2.57)$$

aufgespannte Raum ist 6-dimensional. Das System (2.55), (2.56) lässt sich wie folgt interpretieren: Die erste Gleichung reduziert sich im räumlich homogenen Fall schlicht auf die Normalform der Sattel-Knoten Bifurkation. In der zweiten Komponente liegt eine einfache Relaxationsdynamik $V_t = -V$ vor. Die Bewegungsgleichungen werden dann vermöge der zweiten Ortsableitungen U_{xx} und V_{xx} in einer aus der Physik der Reaktions-Diffusions Systeme geläufigen Form gekoppelt¹². Die Matrix der Kopplungskoeffizienten ist nichtdiagonal und besitzt die spezielle Gestalt $\begin{pmatrix} -a & b \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Wie in [Kugl] gezeigt wurde, ist dies jedoch keine Einschränkung gegenüber dem allgemeinen Fall $\begin{pmatrix} -a & b \\ -c & d \end{pmatrix}$ mit beliebigem, positivem c und d . Der Parameter b sei positiv.

Wir werden sehen, dass dieses Modellsystem alle Bedingungen des Abschnitts 2.1 erfüllt. Es repräsentiert die kombinierte Sattel-Knoten/Soft-Mode Bifurkation in der denkbar einfachsten Form. Aufgrund dieses generischen Charakters, den unsere dynamischen Gleichungen besitzen, sprechen wir in Anlehnung an einen Begriff, der in der Theorie gewöhnlicher Differentialgleichungen eingeführt und präzisiert wird, auch von einer *Normalform* [GuHo]. Das lokale Koordinatensystem $(\mathbf{e}_n, \mathbf{e}_t, \mathbf{e}_c)$ aus Abbildung 2.1 ist nun konstant im gesamten Raum und bereits in Richtung der ursprünglichen Parameterachsen orientiert. Der relevante Parameter der Sattel-Knoten Bifurkation ist natürlich μ , und die Sattel-Knoten Fläche \mathcal{M}_\star ist gerade die Koordinatenebene $\mu = 0$. Der zweite relevante Parameter ist die Größe a . Die Schnittmenge, in der sich die Flächen \mathcal{M}_\star und \mathcal{M}_s berühren, ist schließlich durch die Gerade $\mu = a = 0$ bei variablem Scharparameter b gegeben.

Zwei wichtige Bemerkungen müssen an dieser Stelle gemacht werden: Zum einen reicht die Normalform (2.55) mit der quadratischen Nichtlinearität (2.56) zwar aus, um die Forderungen aus der Bifurkationstheorie zu erfüllen. Um jedoch im Rahmen

¹²Aufgrund der vorausgesetzten räumlichen Inversionssymmetrie sind lineare Terme mit Ableitungen ungerader Ordnung ausgeschlossen.

der *zeitlichen Dynamik* physikalisch sinnvolle Lösungseigenschaften sicherzustellen, müssen nichtlineare Terme höherer Ordnung in der Reihenentwicklung von $G(U)$ berücksichtigt werden. Wir werden dies in Kapitel 3 tun. Zum anderen gibt es gewisse Nebenbedingungen an die Parameter, welche die positive Definitheit der Diffusionsmatrix garantieren, was eine weitere physikalisch notwendige Voraussetzung ist. In diesem Abschnitt, in dem es um die geometrische Interpretation der Grundgleichungen geht, lassen wir sie vorerst außer Acht.

Die Matrix in der Eigenwertgleichung (2.17) nimmt nun für $\mu > 0$ auf den homogen stabilen Lösungszweig $U^\star = +\sqrt{\mu}$ und $V^\star = 0$ folgende Gestalt an¹³:

$$\mathbf{L}(\mathbf{X}_0, k) = \begin{pmatrix} -2U + a k^2 & -b k^2 \\ k^2 & -(1 + k^2) \end{pmatrix} . \quad (2.58)$$

Im homogenen Grenzfall $k = 0$ ist dies die Jacobi-Matrix $D_\Phi \mathbf{F}(\mathbf{X}_0)$ aus Gleichung (2.4). Das Eigenwertproblem von $\mathbf{L}(\mathbf{X}_0, k)$ wird im Abschnitt 3.3 und in Anhang C untersucht¹⁴. Zur Vereinfachung der folgenden Diskussion brechen wir die k -Entwicklung des Spektrums nach der vierten Potenz ab, was in der Umgebung des Entartungspunktes mit $k_c = 0$ erlaubt ist. Das Ergebnis für den kritischen Ast lautet nach Anhang C

$$\lambda(\mathbf{X}_0, k) = -2U + a k^2 - \frac{b k^4}{1 - 2U} + \mathcal{O}(k^6) . \quad (2.59)$$

Damit lassen sich alle Mannigfaltigkeiten mit zugehörigen Tangential- und Normalenvektoren leicht analytisch berechnen.

2.2.2 Sattel-Knoten Bifurkation

Für unsere Modellgleichungen lauten die Sattel-Knoten Bedingungen (2.5) wie folgt:

$$0 = F_1 = \mu - U^2 \quad (2.60a)$$

$$0 = F_2 = -V \quad (2.60b)$$

$$0 = \lambda = -2U . \quad (2.60c)$$

Die Sattel-Knoten Fläche \mathcal{M}_\star ist zweidimensional und kann durch $\boldsymbol{\rho} = (a, b)$ parametrisiert werden. Aus obigen Bedingungen ergeben sich $U(a, b) = V(a, b) = 0$ und $\mu(a, b) = 0$. Damit ist eine Parameterdarstellung explizit bekannt, nämlich

$$\mathbf{X}_0(\boldsymbol{\rho}) = (0, 0, 0, a, b) \quad \text{mit} \quad \boldsymbol{\rho} = (a, b) . \quad (2.61)$$

¹³Im Folgenden lassen wir die Indizes \star , s und c in den Gleichungen weg, da die Bedeutung stets aus dem Zusammenhang hervorgeht.

¹⁴In den Bezeichnungen gilt dort die Entsprechung $2U \leftrightarrow \gamma$.

Zur Bestimmung der drei Normalenvektoren auf der Sattel-Knoten Fläche berechnen wir die Ausdrücke

$$\mathbf{n}_1^0 = \nabla_{\mathbf{X}_0} F_1 = (-2U, 0, 1, 0, 0) \quad (2.62a)$$

$$\mathbf{n}_2^0 = \nabla_{\mathbf{X}_0} F_2 = (0, -1, 0, 0, 0) \quad (2.62b)$$

$$\mathbf{n}_3^0 = \nabla_{\mathbf{X}_0} \lambda = (-2, 0, 0, 0, 0) \quad , \quad (2.62c)$$

in die noch die Bedingungen (2.60), sprich $U = 0$ einzusetzen sind. Die beiden Tangentialvektoren sind schließlich vermöge

$$\mathbf{t}_1^0(\boldsymbol{\rho}) = \left. \frac{\partial \mathbf{X}_0}{\partial a} \right|_{\boldsymbol{\rho}} \quad (2.63a)$$

$$\mathbf{t}_2^0(\boldsymbol{\rho}) = \left. \frac{\partial \mathbf{X}_0}{\partial b} \right|_{\boldsymbol{\rho}} \quad (2.63b)$$

definiert, so dass wir insgesamt erhalten:

$$\mathbf{n}_1^0(\boldsymbol{\rho}) = (0, 0, 1, 0, 0) \quad (2.64a)$$

$$\mathbf{n}_2^0(\boldsymbol{\rho}) = (0, -1, 0, 0, 0) \quad (2.64b)$$

$$\mathbf{n}_3^0(\boldsymbol{\rho}) = (-2, 0, 0, 0, 0) \quad (2.64c)$$

sowie

$$\mathbf{t}_1^0(\boldsymbol{\rho}) = (0, 0, 0, 1, 0) \quad (2.64d)$$

$$\mathbf{t}_2^0(\boldsymbol{\rho}) = (0, 0, 0, 0, 1) \quad . \quad (2.64e)$$

Man überzeugt sich leicht von der Gültigkeit der Orthogonalitätsbedingungen

$$\mathbf{n}_i^0(\boldsymbol{\rho}) \cdot \mathbf{t}_j^0(\boldsymbol{\rho}) = 0 \quad \text{für} \quad i = 1, 2, 3 \quad j = 1, 2 \quad . \quad (2.65)$$

2.2.3 Soft-Mode Instabilität

Die Soft-Mode Instabilität ist nach den Eingangs gemachten Bemerkungen durch die Bedingungen

$$0 = F_1 = \mu - U^2 \quad (2.66a)$$

$$0 = F_2 = -V \quad (2.66b)$$

$$0 = \lambda = -2U + a k^2 - \frac{b k^4}{1-2U} \quad (2.66c)$$

$$0 = \partial_k \lambda = 2 a k - \frac{4 b k^3}{1-2U} \quad (2.66d)$$

festgelegt, siehe die Gleichungen (2.22). Es zeigt sich, dass wir die Soft-Mode Fläche \mathcal{M}_s durch die Parameter $\boldsymbol{\sigma} = (b, k)$ charakterisieren können, denn die Bedingungengleichungen lassen sich mit der Abkürzung

$$w(b, k) = \sqrt{1 - 4 b k^4} \quad (2.67)$$

wie folgt auflösen¹⁵:

$$U(b, k) = \frac{1}{4}(1 - w) \quad (2.68a)$$

$$V(b, k) = 0 \quad (2.68b)$$

$$\mu(b, k) = \frac{1}{16}(1 - w)^2 \quad (2.68c)$$

$$a(b, k) = \frac{4 b k^2}{1+w} \quad (2.68d)$$

Damit erhalten wir die Parameterdarstellung

$$\mathbf{X}(\boldsymbol{\sigma}) = \left(\frac{1}{4}(1 - w), 0, \frac{1}{16}(1 - w)^2, \frac{4 b k^2}{1+w}, b, k \right) \quad \text{mit} \quad \boldsymbol{\sigma} = (b, k) \quad (2.69)$$

Es gibt nun 2 Tangentenvektoren

$$\mathbf{t}_1(\boldsymbol{\sigma}) = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial b} \Big|_{\boldsymbol{\sigma}} \quad (2.70a)$$

$$\mathbf{t}_2(\boldsymbol{\sigma}) = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial k} \Big|_{\boldsymbol{\sigma}} \quad (2.70b)$$

und 4 Normalenvektoren, die sich aus

$$\mathbf{n}_1 = \nabla_{\mathbf{X}} F_1 = (-2 U, 0, 1, 0, 0, 0) \quad (2.71a)$$

$$\mathbf{n}_2 = \nabla_{\mathbf{X}} F_2 = (0, -1, 0, 0, 0, 0) \quad (2.71b)$$

$$\mathbf{n}_3 = \nabla_{\mathbf{X}} \lambda = \left(-2 - \frac{2 b k^4}{(1-2U)^2}, 0, 0, k^2, -\frac{k^4}{1-2U}, 2 a k - \frac{4 b k^3}{1-2U} \right) \quad (2.71c)$$

$$\mathbf{n}_4 = \nabla_{\mathbf{X}} \partial_k \lambda = \left(-\frac{8 b k^3}{(1-2U)^2}, 0, 0, 2 k, -\frac{4 k^3}{1-2U}, 2 a - \frac{12 b k^2}{1-2U} \right) \quad (2.71d)$$

berechnen lassen. Setzen wir die obigen Auflösungen für $a = \frac{4 b k^2}{1+w}$ und $1 - 2 U = \frac{1}{2}(1 + w)$ ein, so folgt als Ergebnis

$$\mathbf{n}_1(\boldsymbol{\sigma}) = \left(-\frac{1}{2}(1 - w), 0, 1, 0, 0, 0 \right) \quad (2.72a)$$

$$\mathbf{n}_2(\boldsymbol{\sigma}) = (0, -1, 0, 0, 0, 0) \quad (2.72b)$$

$$\mathbf{n}_3(\boldsymbol{\sigma}) = \left(-2 - \frac{8 b k^4}{(1+w)^2}, 0, 0, k^2, -\frac{2 k^4}{1+w}, 0 \right) \quad (2.72c)$$

$$\mathbf{n}_4(\boldsymbol{\sigma}) = \left(-\frac{32 b k^3}{(1+w)^2}, 0, 0, 2 k, -\frac{8 k^3}{1+w}, -\frac{16 b k^2}{1+w} \right) \quad (2.72d)$$

¹⁵Man addiert z. B. die mit $-k/2$ multiplizierte vierte Gleichung zur dritten. Bei der Auflösung der sich ergebenden quadratischen Gleichung in U ist das Vorzeichen so zu wählen, dass man für $k = 0$ den Lösungsweig $U = 0$ zurückerhält.

sowie

$$\mathbf{t}_1(\boldsymbol{\sigma}) = \left(\frac{k^4}{2w}, 0, \frac{k^4(1-w)}{4w}, \frac{2k^2}{w}, 1, 0 \right) \quad (2.72e)$$

$$\mathbf{t}_2(\boldsymbol{\sigma}) = \left(\frac{2bk^3}{w}, 0, \frac{bk^3(1-w)}{w}, \frac{8bk}{w(1+w)}, 0, 1 \right) \quad (2.72f)$$

Wiederum lässt sich durch Nachrechnen die Gültigkeit der Orthogonalitätsbedingungen überprüfen:

$$\mathbf{n}_i(\boldsymbol{\sigma}) \cdot \mathbf{t}_j(\boldsymbol{\sigma}) = 0 \quad \text{für} \quad i = 1, 2, 3, 4 \quad j = 1, 2 \quad (2.73)$$

Unter den Normalenvektoren besitzt nur $\mathbf{n}_4(\boldsymbol{\sigma})$ eine von Null verschiedene k -Komponente. Wir führen daher die Projektion $\mathbf{n}_4^0(\boldsymbol{\sigma})$ ein gemäß der Aufteilung

$$\mathbf{n}_4(\boldsymbol{\sigma}) = (\mathbf{n}_4^0(\boldsymbol{\sigma}), n_{4,6}(\boldsymbol{\sigma})) \quad \text{mit} \quad n_{4,6}(\boldsymbol{\sigma}) = -\frac{16bk^2}{1+w} \quad (2.74)$$

Analog gilt für die Tangentenvektoren

$$\mathbf{t}_1(\boldsymbol{\sigma}) = (\mathbf{t}_1^0(\boldsymbol{\sigma}), 0) \quad (2.75a)$$

$$\mathbf{t}_2(\boldsymbol{\sigma}) = (\mathbf{t}_2^0(\boldsymbol{\sigma}), 1) \quad (2.75b)$$

In Übereinstimmung mit den allgemeinen Ausführungen kann man schließlich noch nachweisen, dass die Beziehungen (2.36)

$$t_{1,6}(\boldsymbol{\sigma}) = 0 = -\frac{\mathbf{n}_4^0(\boldsymbol{\sigma}) \cdot \mathbf{t}_1^0(\boldsymbol{\sigma})}{n_{4,6}(\boldsymbol{\sigma})} \quad (2.76a)$$

$$t_{2,6}(\boldsymbol{\sigma}) = 1 = -\frac{\mathbf{n}_4^0(\boldsymbol{\sigma}) \cdot \mathbf{t}_2^0(\boldsymbol{\sigma})}{n_{4,6}(\boldsymbol{\sigma})} \quad (2.76b)$$

erfüllt sind.

2.2.4 Kombinierte Bifurkation

Neben den beiden Fixpunktgleichungen lauten die Bedingungen (2.44) für die kombinierte Bifurkation

$$0 = \lambda = -2U + ak^2 - \frac{bk^4}{1-2U} \quad (2.77a)$$

$$0 = \partial_k^2 \lambda = 2a - \frac{12bk^2}{1-2U} \quad (2.77b)$$

$$0 = k \quad (2.77c)$$

Daraus ergibt sich $U = V = 0$ und $\mu = a = 0$ (und natürlich auch $\partial_k \lambda = 0$). Die Schnittmenge ist eindimensional und kann durch $\tau = b$ parametrisiert werden:

$$\mathbf{X}(\tau) = (0, 0, 0, 0, b, 0) \quad \text{mit} \quad \tau = b \quad (2.78)$$

Ergänzend zu den bisherigen Resultaten notieren wir noch

$$\nabla_{\mathbf{X}} \partial_k^2 \lambda = \left(-\frac{24bk^2}{(1-2U)^2}, 0, 0, 2, -\frac{12k^2}{1-2U}, -\frac{24bk}{1-2U} \right) \quad (2.79)$$

und erhalten für Normalen- und Tangentenvektoren an die Schnittlinie die Ausdrücke (siehe auch die Fußnote 9 auf Seite 15)

$$\mathbf{n}_1(\tau) = \nabla_{\mathbf{X}} F_1|_{\tau} = (0, 0, 1, 0, 0, 0) \quad (2.80a)$$

$$\mathbf{n}_2(\tau) = \nabla_{\mathbf{X}} F_2|_{\tau} = (0, -1, 0, 0, 0, 0) \quad (2.80b)$$

$$\mathbf{n}_3(\tau) = \nabla_{\mathbf{X}} \lambda|_{\tau} = (-2, 0, 0, 0, 0, 0) \quad (2.80c)$$

$$\mathbf{n}_4(\tau) = \nabla_{\mathbf{X}} \partial_k^2 \lambda|_{\tau} = (0, 0, 0, 2, 0, 0) \quad (2.80d)$$

$$\mathbf{n}_5(\tau) = \nabla_{\mathbf{X}} C|_{\tau} = (0, 0, 0, 0, 0, 1) \quad (2.80e)$$

bzw.

$$\mathbf{t}(\tau) = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial b} \Big|_{\tau} = (0, 0, 0, 0, 1, 0) \quad . \quad (2.81)$$

2.2.5 Grenzübergang

Betrachten wir jetzt noch einen durch $\boldsymbol{\sigma} = (b, k)$ gegebenen Punkt auf der Soft-Mode Fläche und vollziehen den Grenzübergang $k \rightarrow 0$, d. h. nähern uns auf diese Weise der Schnittlinie mit der Sattel-Knoten Fläche an. Für die Normalenvektoren $\mathbf{n}_i(\boldsymbol{\sigma})$ aus (2.72) folgt

$$\mathbf{n}_1(b, 0) = (0, 0, 1, 0, 0, 0) \quad (2.82a)$$

$$\mathbf{n}_2(b, 0) = (0, -1, 0, 0, 0, 0) \quad (2.82b)$$

$$\mathbf{n}_3(b, 0) = (-2, 0, 0, 0, 0, 0) \quad (2.82c)$$

$$\mathbf{n}_4(b, 0) = (0, 0, 0, 0, 0, 0) \quad . \quad (2.82d)$$

Wie wir bereits aus den allgemeinen Überlegungen von Seite 16 wissen, entartet der letzte Vektor $\mathbf{n}_4(\boldsymbol{\sigma}) = \nabla_{\mathbf{X}} \partial_k^2 \lambda|_{\boldsymbol{\sigma}}$ bei diesem Grenzübergang zum Nullvektor. Stattdessen kann man aber problemlos den Ausdruck $\lim_{k \rightarrow 0} (\mathbf{n}_4(\boldsymbol{\sigma})/k)$ zur Festlegung der Normalenrichtung verwenden, denn es ist

$$\left(\frac{\mathbf{n}_4}{k} \right) (b, 0) = (0, 0, 0, 2, 0, 0) = \mathbf{n}_4(\tau) \quad . \quad (2.83)$$

Die Tangentenvektoren $\mathbf{t}_j(\boldsymbol{\sigma})$ an die Soft-Mode Fläche gehen für $k = 0$ über in

$$\mathbf{t}_1(b, 0) = (0, 0, 0, 0, 1, 0) = \mathbf{t}(\tau) \quad (2.84a)$$

$$\mathbf{t}_2(b, 0) = (0, 0, 0, 0, 0, 1) \quad , \quad (2.84b)$$

so dass auch die Projektion $(\mathbf{t}_2^0(\boldsymbol{\sigma}))_{k=0}$ formal zum Nullvektor wird:

$$\mathbf{t}_1^0(b, 0) = (0, 0, 0, 0, 1) \quad (2.85a)$$

$$\mathbf{t}_2^0(b, 0) = (0, 0, 0, 0, 0) \quad . \quad (2.85b)$$

Ganz analog zu obigem Vorgehen für den Normalenvektor ist es in diesem Fall jedoch sinnvoll, den Grenzvektor $\lim_{k \rightarrow 0}(\mathbf{t}_2^0(\boldsymbol{\sigma})/k)$ als Projektion des Tangentenvektors $\mathbf{t}_2(\boldsymbol{\sigma})$ einzuführen. Wegen

$$\left(\frac{\mathbf{t}_2^0}{k}\right)(b, 0) = (0, 0, 0, 4b, 0) \quad (2.86)$$

stimmt dann auf der Schnittlinie die lineare Hülle der Vektoren $\mathbf{t}_1^0(\boldsymbol{\sigma})$, $(\mathbf{t}_2^0(\boldsymbol{\sigma})/k)$ mit derjenigen von $\mathbf{t}_1^0(\boldsymbol{\rho})$ und $\mathbf{t}_2^0(\boldsymbol{\rho})$ aus (2.64) überein.

2.2.6 Bifurkationsdiagramme

Wie besprochen entfalten sich die Bifurkationsflächen unseres Modellsystems in einem 6-dimensionalen Raum. Von den möglichen Projektionen auf dreidimensionale Unterräume ist besonders diejenige auf den Raum mit den Achsen (μ, a, k) interessant, weil darin die Aussage des Theorems von Seite 16 voll zum Ausdruck kommt. Das ist in Abbildung 2.3 dargestellt. Anstatt μ kann man in den Diagrammen auch U auftragen, denn durch die Fixpunktgleichung $\mu = U^2$ besteht ein eindeutiger, monotoner Zusammenhang zwischen dem Bifurkationsparameter und dem uns interessierenden stabilen Lösungsweig. Beide Größen sind in topologischer Hinsicht gleichwertig. Eine andere mögliche Wahl der Achsen besteht in den drei Systemparametern (μ, a, b) , siehe Abbildung 2.4. Es ergibt sich dann wieder eine Geometrie wie in Abbildung 2.1. Wenngleich die formale Herleitung aus der allgemeinen Gleichung (2.1) noch aussteht, so lassen die Betrachtungen dieses Kapitels doch insgesamt die wohl begründete Vermutung zu, dass es sich bei (2.55) tatsächlich um die *Normalform der kombinierten Sattel-Knoten/Soft-Mode Bifurkation* handelt.

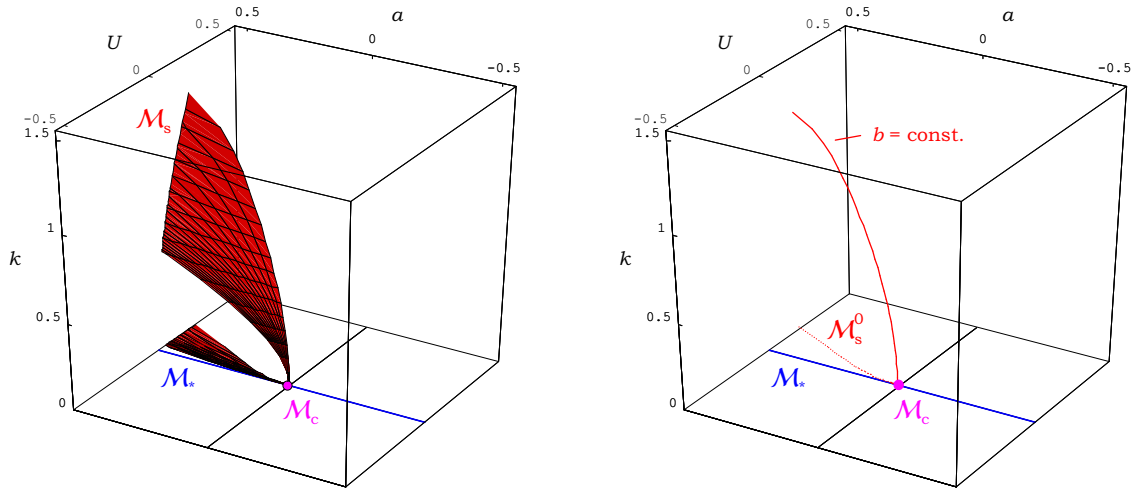


Abbildung 2.3: Ausschnitt der Bifurkationsflächen im Raum (U, a, k) . Das Gitternetz auf der Soft-Mode Fläche \mathcal{M}_s besteht aus den Kurven mit konstantem k bzw. b . Projiziert man eine der Raumkurven zu festem Parameter b auf die Ebene $k = 0$, so berührt die Projektion \mathcal{M}_s^0 die durch die Gerade $U = 0 = k$ repräsentierte Sattel-Knoten Linie \mathcal{M}_* im Punkt $(0, 0, 0)$.

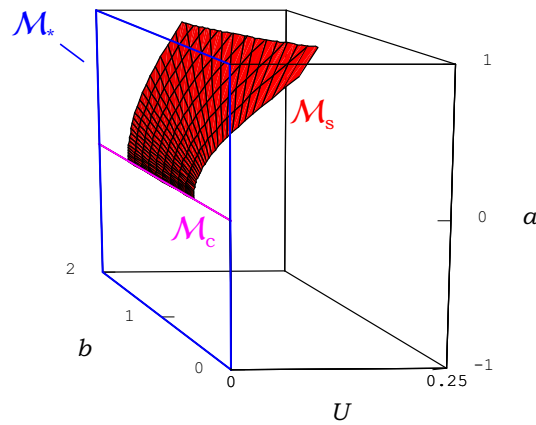


Abbildung 2.4: Ausschnitt der Bifurkationsflächen im Raum (U, a, b) . Das Gitternetz auf der Soft-Mode Fläche \mathcal{M}_s besteht aus den Kurven mit konstantem k bzw. b . Die Ebene $U = 0$ repräsentiert die Sattel-Knoten Fläche \mathcal{M}_* . Die Schnittlinie \mathcal{M}_c , in der sich die beiden Flächen *berühren*, wird durch b parametrisiert. Die Geometrie entspricht derjenigen in Abbildung 2.1.

Kapitel 3

Das Modellsystem

3.1 Normalform

Die im Abschnitt 2.2 eingeführte Normalform (2.55), (2.56) erfüllt zwar hinsichtlich der beteiligten Bifurkationen alle Anforderungen, die wir uns im Abschnitt 2.1 in allgemeiner Form vorgegeben haben. Das System ist aber im Hinblick auf physikalische Anwendungen zu weit reduziert. Der Grund liegt in der rein quadratischen Nichtlinearität, welche die lineare Instabilität oberhalb der Schwelle derart verstärkt, dass sich im Verlauf der zeitlichen Dynamik im Allgemeinen überhaupt keine beschränkten Lösungen mehr einstellen. Bei numerischen Simulationen beobachtet man stets ein explosionsartiges (exponentielles) Anwachsen des Lösungsprofils mit der Zeit. Damit ist das Anfangswertproblem für das System partieller Differentialgleichungen (2.55) in dieser Form nicht wohl gestellt. Wir müssen daher Nichtlinearitäten von mindestens kubischer Ordnung in der Reihenentwicklung der Funktion $G(U)$ berücksichtigen:

$$G(U) = \mu - U^2 - U^3 \quad . \quad (3.1)$$

Dadurch werden Lösungen großer Amplitude wieder „eingefangen“ und die Stabilität des Systems gewährleistet. Das zugehörige Bifurkationsdiagramm homogener Fixpunktlösungen ist in Abbildung 3.1 dargestellt. Außer der schon bekannten Sattel-Knoten Bifurkation bei $\mu = 0$ tritt nun noch eine zweite bei $\mu = 4/27$ auf. Innerhalb des durch die Bifurkationspunkte begrenzten Bereiches existieren drei Lösungen, von denen zwei in Bezug auf homogene Störungen stabil sind, außerhalb existiert je eine stabile Lösung. Es liegt also im Inneren ein typischer Fall von *Bistabilität* vor, bei dem zwei homogene Lösungen stabil koexistieren können. Es bleibt die Frage, wie sich die durch die Diffusionsmatrix vermittelte Ortsabhängigkeit der Bewegungsgleichungen auswirkt: Jeder der beiden homogen stabilen Lösungszweige kann nun gegebenenfalls durch räumlich inhomogene Störungen destabilisiert werden. Daher gibt es im Raum der relevanten Parameter (in der (μ, a) -Ebene) auch zwei zugehörige Grenzlinien marginaler Stabilität und schließlich zwei der in Kapitel 2 ausführ-

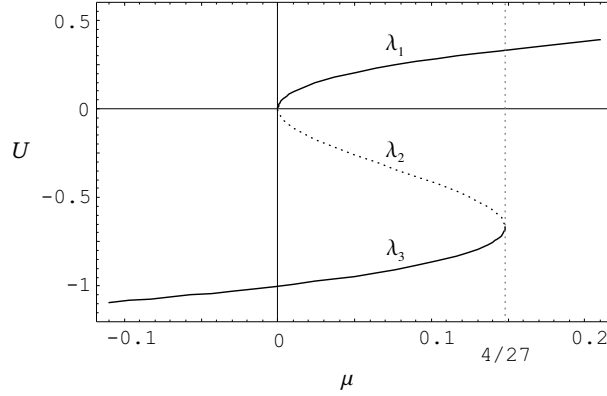


Abbildung 3.1: Bifurkationsdiagramm räumlich homogener Fixpunktlösungen für das Modellsystem (2.55) mit $G(U) = \mu - U^2 - U^3$. Die drei Zweige λ_1 bis λ_3 erfüllen die Gleichung $G(\lambda) = 0$. Bei den Parameterwerten $\mu = 0$ und $\mu = 4/27$ tritt jeweils eine Sattel-Knoten Bifurkation auf. Die Lösung λ_2 ist instabil gegenüber räumlich homogenen Störungen, die beiden anderen Zweige sind stabil.

lich diskutierten Kodimension-2 Punkte, an denen es zu einer Verschmelzung der jeweiligen Soft-Mode Instabilität mit einer Sattel-Knoten Bifurkation kommt. In der Umgebung jedes dieser Punkte gelten, was den grundsätzlichen Verlauf der Bifurkationslinien und die Form der Eigenwertspektren angeht, die bereits besprochenen charakteristischen Eigenschaften.

Aufgrund der Punktsymmetrie der Kurve aus Abbildung 3.1 bezüglich des Wendepunktes genügt es, einen der beiden homogen stabilen Fixpunkte zu betrachten, z. B. den oberen. Für das weitere Vorgehen ist es angebracht, die Abweichung von dieser Lösung als dynamische Variable einzuführen. Durch diese Verschiebung wird das konstante Glied μ in den Bewegungsgleichungen wegtransformiert. Die Transformation ist im Anhang A explizit angegeben. Wie man dort sieht, ist das ursprüngliche Modellsystem (2.55) inklusive der Nichtlinearität (3.1) im Fall $\mu > 0$ vollständig in den Gleichungen

$$u_t = -\gamma u - \beta u^2 - u^3 - a u_{xx} + b v_{xx} \quad (3.2a)$$

$$v_t = -v - u_{xx} + v_{xx} \quad (3.2b)$$

enthalten, die fortan die dynamischen Grundgleichungen dieser Arbeit darstellen. Im Sinne der Transformation (A.1) sind die beiden Parameter $\beta > 0$ und $\gamma > 0$ noch miteinander verknüpft, nämlich vermöge der Beziehung (A.7). Wir werden diese ursprüngliche Motivation der Bewegungsgleichungen (3.2) nun jedoch insofern verallgemeinern, als wir im weiteren Verlauf der Arbeit β und γ frei (aber weiterhin positiv) wählen. Dadurch gewinnt das System noch an Lösungsreichhaltigkeit hinzu. Wir werden in Abschnitt 6.3 noch einmal darauf zu sprechen kommen.

3.2 Räumlich homogene Lösungen

Homogene Fixpunktlösungen des im letzten Abschnitt eingeführten Systems (3.2) sind durch die kubische Gleichung $H(\xi) = 0$ mit

$$H(u) = \gamma u + \beta u^2 + u^3 \quad (3.3)$$

festgelegt¹. Sie lauten:

$$\xi_1 = 0 \quad \text{und} \quad \xi_{2,3} = -\frac{1}{2} \left(\beta \mp \sqrt{\beta^2 - 4\gamma} \right) \quad (3.4)$$

Betrachten wir jetzt γ als relevanten Parameter, der bei festgehaltenem β variiert wird. Dann ergibt sich das in Abbildung 3.2 gezeigte Bifurkationsdiagramm, welches dem aus Abbildung 3.1 gegenüber zu stellen ist. Lässt man auch negative Werte für γ zu, so existiert an der Stelle $\gamma = 0$ nun formal gesehen anstatt einer Sattel-Knoten Bifurkation eine transkritische Bifurkation. Das ist aber eine triviale Folge der Tatsache, dass eine der homogenen Lösungen wie im letzten Abschnitt beschrieben als Referenzlösung in den Koordinatenursprung verschoben wurde². Bei $\gamma = \beta^2/4$ tritt wie schon erwähnt eine weitere Sattel-Knoten Bifurkation auf.

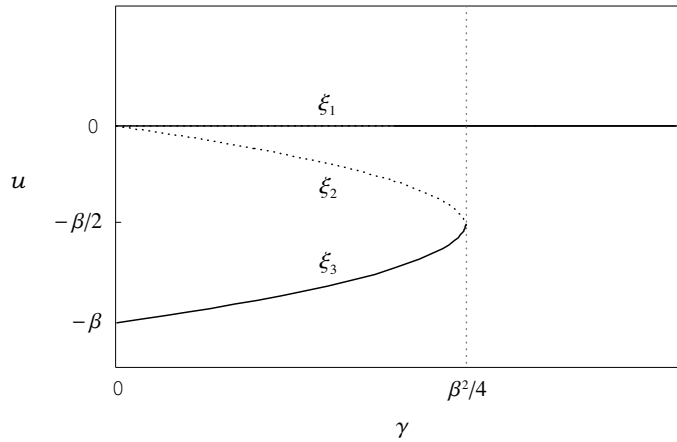


Abbildung 3.2: Bifurkationsdiagramm räumlich homogener Fixpunktlösungen für die Grundgleichungen (3.2) mit $\beta, \gamma > 0$. Die drei Zweige ξ_1 bis ξ_3 sind Lösungen der Gleichung $H(\xi) = 0$ mit $H(u) = \gamma u + \beta u^2 + u^3$. Das Diagramm geht aus Abbildung 3.1 hervor, indem man für positives μ um die Lösung λ_1 entwickelt. Die beiden Sattel-Knoten Punkte werden dabei auf $\gamma = 0$ und $\gamma = \beta^2/4$ abgebildet.

¹Die Komponente v muss stets verschwinden.

²Ohnehin haben wir uns auf Werte $\gamma > 0$ festgelegt.

3.3 Lineare Stabilitätsanalyse

Die Stabilitätsanalyse für die triviale Lösung $\xi_1 = 0$ erfolgt im Prinzip wie in Kapitel 2 bereits geschildert. Der Lösungsweig ξ_2 ist schon im räumlich homogenen Fall instabil und braucht nicht weiter betrachtet zu werden. Die Berechnung der Bifurkationslinien für die dritte Lösung ξ_3 kann wie im Anhang B dargestellt aufgrund von Symmetrieargumenten auf die für ξ_1 zurückgeführt werden. Während in Kapitel 2 die Betrachtungen auf die Umgebung des Entartungspunktes beschränkt waren, sollen die Stabilitätsgrenzen nun global für den gesamten Parameterraum ermittelt werden. Deswegen wird die zugehörige Rechnung hier noch einmal kurz skizziert. Dabei bietet sich auch die Gelegenheit, auf einige grundsätzliche Einschränkungen bei der Vorgabe der Parameter hinzuweisen.

Einsetzen des Fourier-Ansatzes

$$\begin{pmatrix} u(x, t) \\ v(x, t) \end{pmatrix} = \Psi(k) e^{ikx} e^{\lambda(k)t} \quad \text{mit} \quad \Psi(k) = \begin{pmatrix} u_k^0 \\ v_k^0 \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

in (3.2) führt nach anschließender Linearisierung auf die Eigenwertgleichung³

$$\mathbf{L}(k) \Psi(k) = \lambda(k) \Psi(k) \quad (3.6)$$

mit der 2×2 Matrix:

$$\mathbf{L}(k) = \begin{pmatrix} -\gamma + a k^2 & -b k^2 \\ k^2 & -(1 + k^2) \end{pmatrix} . \quad (3.7)$$

Die Forderung nach nichttrivialer Lösbarkeit liefert dann das charakteristische Polynom

$$\lambda^2 + p(k)\lambda + q(k) = 0 \quad (3.8)$$

mit den Abkürzungen

$$\begin{aligned} p(k) &= A + B k^2 \\ q(k) &= C + D k^2 + E k^4 \quad , \end{aligned} \quad (3.9)$$

sowie:

$$\begin{aligned} A &= 1 + \gamma & C &= \gamma \\ B &= 1 - a > 0 & D &= \gamma - a \\ & & E &= b - a > 0 \quad . \end{aligned} \quad (3.10)$$

Durch Auflösung der quadratischen Gleichung (3.8) erhält man direkt die beiden von der Wellenzahl abhängigen Eigenwerte $\lambda^{(\pm)}(k)$. Sie werden im Anhang C näher diskutiert. Um physikalisch nicht sinnvolle Instabilitäten gegenüber Störungen beliebig kleiner Wellenlänge (große k) auszuschließen, müssen die Nebenbedingungen $B > 0$ und $E > 0$ aufgestellt werden. Dies ist jedoch gerade äquivalent zur Forderung, die Diffusionsmatrix $\begin{pmatrix} -a & b \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ in den Ausgangsgleichungen (3.2) solle *positiv definit* sein. Damit wird prinzipiell eine Fallunterscheidung $b \gtrless 1$ notwendig. In der gesamten weiteren Arbeit werden wir den Fall $b > 1$ diskutieren, so dass man nur noch die Einschränkung $a < 1$ zu beachten hat.

³Dies ist ein Spezialfall von Gleichung (2.17).

3.4 Bifurkationsdiagramm

Die einzigen in unserem Modellsystem auftretenden Instabilitäten sind vom Typ „Soft-Mode“. Die notwendigen Bedingungen dafür wurden bereits in Abschnitt 2.1.3 in allgemeiner Form diskutiert. Im vorliegenden Fall reduzieren sie sich auf⁴:

$$q(k_c) = 0 \quad \text{und} \quad q'(k_c) = 0 \quad . \quad (3.11)$$

Aus der zweiten Bedingung folgt sofort ein Ausdruck für die kritische Wellenzahl:

$$k_c^2 = -\frac{D}{2E} = \frac{a - \gamma}{2(b - a)} \quad . \quad (3.12)$$

Einsetzen in die erste Gleichung liefert anschließend:

$$a^2 + 2\gamma a + \gamma(\gamma - 4b) = 0 \quad . \quad (3.13)$$

Damit ergibt sich durch Auflösen nach a der funktionale Zusammenhang

$$a(\gamma) = -\gamma + 2\sqrt{b\gamma} \quad , \quad (3.14)$$

welcher die Schwelle im Parameterraum festlegt⁵. Substitution in (3.12) ergibt die auf der Soft-Mode Linie gültige Formel

$$k_c^2(\gamma) = \frac{\sqrt{\gamma}}{\sqrt{b} - \sqrt{\gamma}} \quad , \quad (3.15)$$

auf die wir noch gelegentlich zurückgreifen werden. Nützlich ist auch die Parameterdarstellung der Bifurkationslinie mit der kritischen Wellenzahl als Kurvenparameter,

$$a(k_c) = b k_c^2 \frac{2 + k_c^2}{(1 + k_c^2)^2} \quad (3.16a)$$

$$\gamma(k_c) = \frac{b k_c^4}{(1 + k_c^2)^2} \quad , \quad (3.16b)$$

die man durch Umstellung obenstehender Gleichungen erhält.

Im Sinne der Diskussion von Kapitel 2 identifizieren wir a und γ als *relevante* Parameter, deren Variation zur Entfaltung der grundlegenden Sattel-Knoten und Soft-Mode Bifurkationen führt. Deswegen zeichnen wir in Abbildung 3.3 das Bifurkationsdiagramm in der (γ, a) -Ebene bei fixierten restlichen Parametern b und β . Die gerade ermittelte Kurve stellt die Instabilitätsschwelle für die triviale Lösung $\xi_1 = 0$ dar.

⁴Der üblichen Konvention folgend schreiben wir für die kritische Wellenzahl nun k_c , anstelle der im Kapitel 2 verwendeten Bezeichnung k_s .

⁵Das Vorzeichen muss bei der Lösung der quadratischen Gleichung so gewählt werden, dass die Nebenbedingung $a(\gamma) > \gamma$ für genügend kleine γ erfüllt und somit der Ausdruck (3.12) positiv ist.

Vervollständigt wird das Diagramm durch eine zweite Kurve, die sich auf die andere, homogen stabile Fixpunktlösung ξ_3 bezieht und im Anhang B angegeben wird. Bei den Soft-Mode Linien gemeinsam ist die Berührung mit der jeweiligen Sattel-Knoten Linie in den Entartungspunkten P_1 und P_2 entsprechend der allgemeinen Theorie von Kapitel 2. Ausgehend vom Wert Null in diesen Punkten nimmt die kritische Wellenzahl k_c entlang der Grenzlinien kontinuierlich zu. Die Eigenwertspektren in den Kodimension-2 Punkten haben den ebenfalls schon besprochenen quartischen Verlauf. Nach oben hin ist der physikalisch sinnvolle Bereich des Bifurkationsdiagrammes durch die Gerade $a = 1$ beschränkt, an dem die positive Definitheit der Diffusionsmatrix verloren geht.

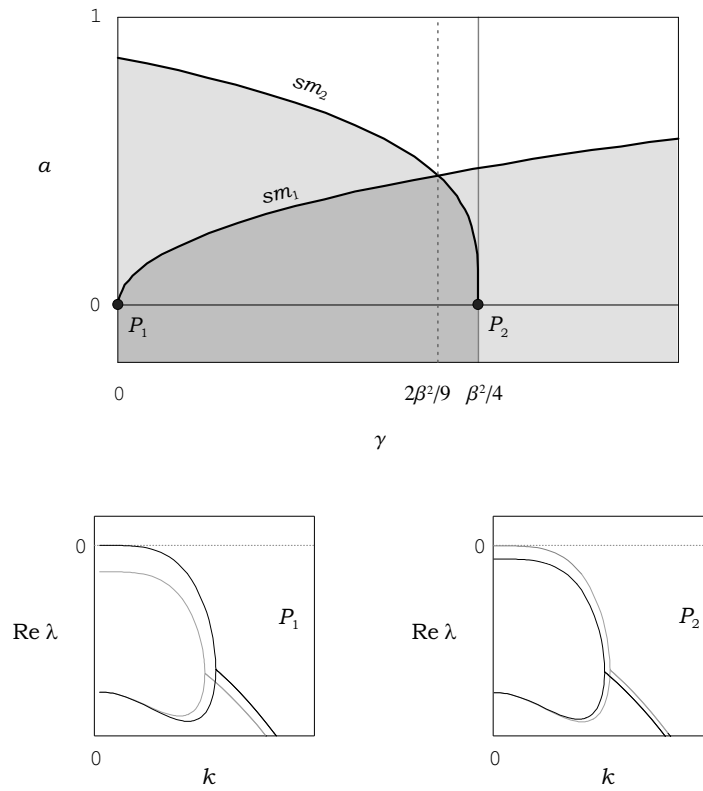


Abbildung 3.3: Stabilitätsdiagramm für die räumlich homogenen, stationären Lösungen des Systems (3.2) bei festen Parametern $b > 1$ und $\beta > 0$. Für Werte $0 < \gamma < \beta^2/4$ existieren zwei Lösungen (ξ_1 und ξ_3 in Abbildung 3.2), die stabil bezüglich räumlich homogener Störungen sind. Sie werden an den Soft-Mode Linien sm_1 bzw. sm_2 instabil gegenüber inhomogenen Störungen. Die stabilen Bereiche sind jeweils grau unterlegt. Im dunkelgrauen Gebiet können also beide Lösungen stabil koexistieren. Die Linien marginaler Stabilität enden (oder starten, je nach Sichtweise) in den Kodimension-2 Punkten P_1 und P_2 . Dort verschwindet die kritische Wellenzahl, und die kritischen Äste der Eigenwertspektren haben einen k^4 -förmigen Verlauf, wie man in den beiden unteren Bildern sieht. Die dunklen Linien in den Spektren beziehen sich auf die Lösung ξ_1 , die hellen auf ξ_3 .

3.5 Transformation auf Normalkoordinaten

Ziel dieses Abschnitts ist es, die Grundgleichungen (3.2) in *linearer* Ordnung zu entkoppeln. Wir werden jedoch sehen, dass dies nur im *stationären* Fall $\dot{u} = \dot{v} = 0$ gelingt⁶. Das wird durch die Koordinatentransformation

$$u = x_1 - x_2 \quad v = \frac{\omega_1^2}{1 + \omega_1^2} x_1 - \frac{\omega_2^2}{1 + \omega_2^2} x_2 \quad (3.17)$$

mit

$$\omega_1^2 = k_c^2 + \Gamma \quad \omega_2^2 = k_c^2 - \Gamma \quad (3.18)$$

sowie

$$k_c^2 = \frac{a - \gamma}{2(b - a)} \quad \Gamma = \frac{\sqrt{(a + \gamma)^2 - 4b\gamma}}{2(b - a)} \quad (3.19)$$

bewerkstelligt. Zum Nachweis dieser Behauptung fassen wir die Nichtlinearitäten in der Form

$$F(u) = \beta u^2 + u^3 \quad (3.20)$$

zusammen und führen ferner die Abkürzungen

$$v_1 = \frac{\omega_1^2}{1 + \omega_1^2} \quad v_2 = \frac{\omega_2^2}{1 + \omega_2^2} \quad (3.21)$$

ein. Da wir später auch die volle Zeitabhängigkeit der Bewegungsgleichungen benötigen, wird diese gleich mittransformiert. Einige Bemerkungen zur Bedeutung der eingeführten Größen (3.18) und (3.19) folgen im Anschluss an die Rechnung in Abschnitt 3.7.

Indem man die mit a bzw. b multiplizierte Gleichung (3.2b) von (3.2a) subtrahiert und die Transformation (3.17) mitsamt den Abkürzungen (3.21) einsetzt, ergibt sich:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 - \dot{x}_2 - b(v_1 \dot{x}_1 - v_2 \dot{x}_2) = \\ (b - a)(x_1'' - x_2'') - \gamma(x_1 - x_2) + b(v_1 x_1 - v_2 x_2) - F(x_1 - x_2) \end{aligned} \quad (3.22a)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 - \dot{x}_2 - a(v_1 \dot{x}_1 - v_2 \dot{x}_2) = \\ (b - a)(v_1 x_1'' - v_2 x_2'') - \gamma(x_1 - x_2) + a(v_1 x_1 - v_2 x_2) - F(x_1 - x_2) \end{aligned} \quad (3.22b)$$

Die erste Gleichung wird nun jeweils mit v_1 bzw. v_2 multipliziert und von der zweiten

⁶Für zeitliche Ableitungen verwenden wir in diesem Abschnitt wahlweise die Schreibweisen u_t oder \dot{u} , analog u_x oder u' für räumliche Ableitungen.

abgezogen. Nach dem Sortieren der Terme folgt:

$$\begin{aligned} &((1 - a v_1) - v_2 (1 - b v_1)) \dot{x}_1 - ((1 - a v_2) - v_2 (1 - b v_2)) \dot{x}_2 = \\ &(\gamma (v_2 - 1) - v_1 (b v_2 - a)) x_1 - [\gamma (v_2 - 1) - v_2 (b v_2 - a)] x_2 \\ &+ (b - a)(v_1 - v_2) x_1'' + (v_2 - 1)F(x_1 - x_2) \end{aligned} \quad (3.23a)$$

$$\begin{aligned} &((1 - a v_1) - v_1 (1 - b v_1)) \dot{x}_1 - ((1 - a v_2) - v_1 (1 - b v_2)) \dot{x}_2 = \\ &[\gamma (v_1 - 1) - v_1 (b v_1 - a)] x_1 - (\gamma (v_1 - 1) - v_2 (b v_1 - a)) x_2 \\ &+ (b - a)(v_1 - v_2) x_2'' + (v_1 - 1)F(x_1 - x_2) \quad . \end{aligned} \quad (3.23b)$$

Die Ausdrücke in den eckigen Klammern verschwinden aufgrund der im Anhang aufgeführten Relationen (D.5). Jetzt dividiert man noch durch den Vorfaktor $(b - a) \cdot (v_1 - v_2)$ der Terme x_1'' bzw. x_2'' und formt die restlichen Faktoren vor den Variablen x_1 und x_2 und deren zeitlichen Ableitungen sowie vor der Nichtlinearität F gemäß den Beziehungen (D.6) bis (D.9) um. Das Ergebnis lautet wie folgt:

$$x_1'' + \omega_1^2 x_1 = \frac{1 + \omega_1^2}{2\Gamma(b - a)} \left(F(x_1 - x_2) + r_1 \dot{x}_1 - (1 - \gamma) \dot{x}_2 \right) \quad (3.24a)$$

$$x_2'' + \omega_2^2 x_2 = \frac{1 + \omega_2^2}{2\Gamma(b - a)} \left(F(x_1 - x_2) + (1 - \gamma) \dot{x}_1 - r_2 \dot{x}_2 \right) \quad (3.24b)$$

Hierbei wurden zwei weitere Abkürzungen r_1 und r_2 eingeführt:

$$r_i = 1 + \frac{\gamma - a \omega_i^2}{1 + \omega_i^2} \quad (i = 1, 2) \quad . \quad (3.25)$$

3.6 Swift-Hohenberg Form

Durch Addition und Subtraktion von (3.24a) und (3.24b) entstehen Gleichungen, die die Kombinationen

$$u = x_1 - x_2 \quad \bar{u} = x_1 + x_2 \quad (3.26)$$

beinhalten. Mit den Definitionen

$$p = 1 - \frac{1}{2}(a + \gamma) \quad q = 1 + k_c^2 p \quad (3.27)$$

sehen diese wie folgt aus:

$$u'' + k_c^2 u + \Gamma \bar{u} = \frac{1}{b - a} (F(u) + p \dot{u}) - \Gamma \dot{\bar{u}} \quad (3.28a)$$

$$\bar{u}'' + k_c^2 \bar{u} + \Gamma u = \frac{1}{\Gamma(b - a)} \left((1 + k_c^2) F(u) + q \dot{u} \right) - k_c^2 \dot{\bar{u}} \quad . \quad (3.28b)$$

Man differenziert (3.28a) zweimal nach der Ortsvariablen x und setzt die Größe \bar{u}'' aus (3.28b) ein. Anschließend wird vermöge der ursprünglichen Gleichung (3.28a) noch \bar{u} eliminiert⁷. Ganz analog wird mit der zweiten Gleichung (3.28b) verfahren: Nach zweimaliger Ableitung nach x werden u'' und u eliminiert. Außerdem beachte man in diesem Fall die Identitäten (D.2), (D.3) und (D.10). Das Ergebnis der Bemühungen lässt sich dann in der Form

$$\Gamma^2 u - (k_c^2 + \partial_x^2)^2 u = \frac{1}{b-a} \left(F(u) + \dot{u} - \partial_x^2 (F(u) + p \dot{u}) \right) + \Gamma \partial_x^2 \dot{u} \quad (3.29a)$$

$$\begin{aligned} \Gamma^2 \bar{u} - (k_c^2 + \partial_x^2)^2 \bar{u} = & -\frac{a+\gamma}{2\Gamma(b-a)^2} \left(F(u) + (1-\gamma) \dot{u} \right) + \frac{\gamma}{b-a} \dot{u} \\ & - \frac{1}{\Gamma(b-a)} \partial_x^2 \left((1+k_c^2) F(u) + q \dot{u} \right) + k_c^2 \partial_x^2 \dot{u} \end{aligned} \quad (3.29b)$$

schreiben. Weiterhin kann man (3.28a) mit k_c^2 und (3.28b) mit Γ multiplizieren und nach der Zeit t differenzieren. Umstellen nach dem in beiden Fällen auftretenden Term $k_c^2 \Gamma \bar{u}_t$ und Gleichsetzen der Ausdrücke liefert die Relation

$$\Gamma \bar{u}_{txx} = k_c^2 u_{txx} + \frac{1}{b-a} \left((\gamma + F'(u)) u_t + u_{tt} \right) \quad (3.30)$$

Dabei wurde wiederum von der Definition (3.27) und der Identität (D.2) Gebrauch gemacht⁸. Einsetzen in die Gleichung 4. Ordnung (3.29a) ergibt mit (D.11) schließlich eine Bewegungsgleichung für u alleine, in der allerdings Orts- und Zeitableitungen vermischt sind und auch Zeitableitungen zweiter Ordnung auftreten:

$$\Gamma^2 u - (k_c^2 + \partial_x^2)^2 u = \frac{1}{b-a} \left(F(u) - \partial_x^2 F(u) + G(u) \right) \quad (3.31)$$

mit

$$G(u) = (1 + \gamma + F'(u)) u_t + u_{tt} - (1-a) u_{txx} \quad (3.32)$$

Bei bekanntem $u(x, t)$ liegt $\bar{u}(x, t)$ fest und kann (zumindest im Prinzip) durch wiederholte Integration aus Gleichung (3.30) berechnet werden. Damit kennt man auch das Verhalten von $v(x, t)$.

3.7 Diskussion

Durch die Koordinatentransformation (3.17) ließen sich die Ausgangsgleichungen (3.2) auf das *gekoppelte System nichtlinearer Oszillatoren* (3.24) mit Eigenfrequenzen ω_1 und ω_2 abbilden. Die Größe k_c ist gemäß (3.19) im gesamten Parameterbereich definiert und besitzt an der Instabilitätsschwelle sm_1 gerade die Bedeutung

⁷Ausdrücke mit \dot{u} verbleiben allerdings.

⁸ $F'(u)$ bezeichnet an dieser Stelle die Ableitung der Funktion $F(u)$ nach ihrem Argument.

(3.15) der kritischen Wellenzahl⁹. Sie parametrisiert die Lage eines Punktes auf der Linie. Die Größe Γ wiederum ist ein direktes Maß für den Abstand von der Schwelle und verschwindet auf derselben (im instabilen Bereich ist Γ reell und positiv). Auf der Bifurkationslinie sind die beiden ungestörten Eigenfrequenzen (3.18) daher gleich groß, die Differenz ihrer Quadrate wächst proportional mit dem Abstand von ihr. Man kann k_c und Γ ebenso gut wie a und γ als unabhängige Parameter auffassen. Die Tatsache, dass Γ auf der rechten Seite der Oszillatorgleichungen im Nenner auftritt, stellt übrigens keine ernsthafte Schwierigkeit dar, wie wir noch sehen werden. Durch die Kombination der beiden Differentialgleichungen zweiter Ordnung ergab sich die Bewegungsgleichung (3.31), welche von vierter Ordnung bezüglich der Ortsvariablen ist. Auf der linken Seite identifiziert man den von der *Swift-Hohenberg* Gleichung [SwHo, Mann]

$$\partial_t u = \alpha u - (k_c^2 + \partial_x^2)^2 u - u^3 \quad (3.33)$$

bekannten linearen Differentialoperator. Die Größe Γ^2 übernimmt in (3.31) explizit die Rolle des Bifurkationsparameters α . Gegenüber der einfachen Swift-Hohenberg Gleichung (3.33) ist die Nichtlinearität $F(u)$ im hier vorliegenden Fall um einen quadratischen Term βu^2 erweitert. Zusätzlich tritt die zweite räumliche Ableitung von $F(u)$ auf. Wir werden diesen Punkt im Abschnitt 4.3 noch näher beleuchten. Die in der Funktion $G(u)$ enthaltene Zeitabhängigkeit (3.32) ist ebenfalls wesentlich komplizierter als bei der gewöhnlichen Swift-Hohenberg Gleichung.

Abschließend noch einige Bemerkungen zum Verhalten im stabilen Bereich des Bifurkationsdiagrammes aus Abbildung 3.3. Unterhalb der Schwelle sm_1 ist Γ rein imaginär. Zweckmäßigerweise schreibt man dort

$$\Gamma = i \Delta \quad \text{mit} \quad \Delta = \frac{\sqrt{4b\gamma - (a + \gamma)^2}}{2(b - a)} \quad (3.34)$$

Somit werden die Frequenzen ω_1 und ω_2 komplexe Größen:

$$\omega_1^2 = k_c^2 + i \Delta \quad \omega_2^2 = k_c^2 - i \Delta \quad (3.35)$$

Aus der Umkehrung der Koordinatentransformation (3.17)

$$x_1 = \frac{1}{2\Gamma}(1 + \omega_1^2)(v - \omega_2^2(u - v)) \quad (3.36a)$$

$$x_2 = \frac{1}{2\Gamma}(1 + \omega_2^2)(v - \omega_1^2(u - v)) \quad (3.36b)$$

ist ersichtlich, dass die Variablen x_1 und x_2 nun ebenfalls komplexe Werte annehmen. Da k_c^2 stets reell bleibt, gilt die Beziehung $(\omega_1^2)^* = \omega_2^2$, wobei der Stern die komplexe Konjugation bezeichnet. Mit $\Gamma^* = -\Gamma$ folgt der Zusammenhang

$$x_1^* = -x_2 \quad (3.37)$$

⁹Für $a \geq \gamma$ ist k_c reell, andernfalls rein imaginär.

Die Größe

$$\Gamma \bar{u} = \Gamma(x_1 + x_2) = \frac{2bv - (a + \gamma)u}{2(b - a)} \quad (3.38)$$

bleibt auch unterhalb der Schwelle reell und bietet sich dort wiederum zusammen mit u zur Beschreibung der Systemdynamik an, siehe die beiden Gleichungen (3.28).

Linearisiert man die beiden Bewegungsgleichungen (3.24), so sind diese im zeitabhängigen Fall immer noch gekoppelt. Entkopplung wird erst durch die Forderung nach Stationarität erreicht. Im nächsten Kapitel beschäftigen wir uns ausführlich mit den daraus resultierenden Konsequenzen.

Kapitel 4

Eigenschaften des stationären Systems

Im Fall zeitunabhängiger Lösungen reduzieren sich unsere fundamentalen Ausgangsgleichungen (3.2) auf ein System gewöhnlicher, nichtlinearer Differentialgleichungen. In diesem Abschnitt fassen wir die stationären Gleichungen noch einmal zusammen und diskutieren einige grundlegende Eigenschaften. In den ursprünglichen Koordinaten u und v lauten sie:

$$0 = -\gamma u - \beta u^2 - u^3 - a u_{xx} + b v_{xx} \quad (4.1a)$$

$$0 = -v - u_{xx} + v_{xx} \quad . \quad (4.1b)$$

Nach der Transformation (3.17) auf die Normalkoordinaten x_1 und x_2 ergibt sich mit den Abkürzungen (3.18) bis (3.20) das System gekoppelter Oszillatoren

$$x_1'' + \omega_1^2 x_1 = \frac{1 + \omega_1^2}{2\Gamma(b-a)} F(x_1 - x_2) \quad (4.2a)$$

$$x_2'' + \omega_2^2 x_2 = \frac{1 + \omega_2^2}{2\Gamma(b-a)} F(x_1 - x_2) \quad . \quad (4.2b)$$

Durch die Kombination der beiden Gleichungen zweiter Ordnung erhält man eine Gleichung vierter Ordnung vom verallgemeinerten Swift-Hohenberg Typ:

$$\Gamma^2 u - (k_c^2 + \partial_x^2)^2 u = \frac{1}{b-a} \left(F(u) - \partial_x^2 F(u) \right) \quad . \quad (4.3)$$

Man kann sie mit der Relation (D.2) auch in der Form

$$(b-a) u_{xxxx} + (a-\gamma) u_{xx} + \gamma u = - \left(F(u) - \partial_x^2 F(u) \right) \quad (4.4)$$

schreiben. Diese stationären Gleichungen lassen sich von einer Hamiltonfunktion ableiten, welche wir im nächsten Abschnitt angeben.

4.1 Quasi-Hamiltonfunktion

4.1.1 Darstellung in den Koordinaten u, v

Wir definieren die Hamiltonfunktion $H^{(1)}(u, v, p_u, p_v)$ durch¹

$$H = T + U \quad (4.5)$$

mit den beiden Anteilen

$$T = \frac{1}{2(b-a)} \left(p_u^2 + 2p_u p_v + \frac{a}{b} p_v^2 \right) \quad (4.6a)$$

$$U = \frac{1}{2} b v^2 - \frac{1}{2} \gamma u^2 - \frac{1}{3} \beta u^3 - \frac{1}{4} u^4 \quad (4.6b)$$

Die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen lauten:

$$u_x = \frac{\partial H}{\partial p_u} \quad v_x = \frac{\partial H}{\partial p_v} \quad (4.7a)$$

$$(p_u)_x = -\frac{\partial H}{\partial u} \quad (p_v)_x = -\frac{\partial H}{\partial v} \quad (4.7b)$$

Die beiden ersten Gleichungen legen die kanonischen Impulse

$$p_u = b v_x - a u_x \quad p_v = b (u_x - v_x) \quad (4.8)$$

fest. Zusammen mit den beiden verbleibenden Gleichungen liefern sie unmittelbar das stationäre Modellsystem (4.1).

4.1.2 Darstellung in den Koordinaten x_1, x_2

In den Normalkoordinaten der gekoppelten Oszillatoren schreiben wir für die Funktion $H^{(2)}(x_1, x_2, p_1, p_2)$ wieder

$$H = T + U \quad (4.9)$$

Während der kinetische Anteil durch

$$T = T_1 - T_2 \quad \text{mit} \quad T_i = \frac{1}{2} (1 + \omega_i^2) p_i^2 \quad (i = 1, 2) \quad (4.10)$$

gegeben ist, spalten wir den Beitrag der potentiellen Energie auf:

$$U = V + W \quad (4.11)$$

¹Wir verwenden die oberen Indizes (1) und (2), um die Abhängigkeit vom jeweiligen Koordinatensatz (u, v) bzw. (x_1, x_2) zu unterscheiden. Solange keine Verwechslungsmöglichkeit besteht, lassen wir sie aber im Sinne einer übersichtlicheren Darstellung wieder weg.

Dabei bedeutet

$$V = V_1 - V_2 \quad \text{mit} \quad V_i = \frac{1}{2} \left(\frac{\omega_i^2}{1 + \omega_i^2} \right) x_i^2 \quad (i = 1, 2) \quad , \quad (4.12)$$

und der Wechselwirkungsanteil ist

$$W = g (x_1 - x_2)^3 + h (x_1 - x_2)^4 \quad . \quad (4.13)$$

Hierbei wurden für die Kopplungskonstanten die Abkürzungen

$$g = -\frac{1}{3} \beta C \quad h = -\frac{1}{4} C \quad C = \frac{1}{2 \Gamma(b-a)} \quad (4.14)$$

eingeführt. Die Hamiltonschen Gleichungen lauten nun:

$$x'_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad p'_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i} \quad (i = 1, 2) \quad . \quad (4.15)$$

Wiederum überprüft man durch Elimination der kanonischen Impulse

$$p_1 = \frac{x'_1}{1 + \omega_1^2} \quad p_2 = -\frac{x'_2}{1 + \omega_2^2} \quad (4.16)$$

leicht die Gültigkeit der stationären Gleichungen (4.2).

4.1.3 Diskussion

Nach dem bisher Gesagten ist klar, dass die beiden Hamiltonfunktionen $H^{(1)}$ und $H^{(2)}$ durch eine kanonische Transformation verknüpft sind. Neben der Transformation der Koordinaten (3.17) benötigen wir noch die Umrechnung der Impulse

$$p_u = -\frac{1}{\omega_1^2 - \omega_2^2} \left((1 + \omega_1^2) \omega_2^2 p_1 + (1 + \omega_2^2) \omega_1^2 p_2 \right) \quad (4.17a)$$

$$p_v = \frac{1}{\omega_1^2 - \omega_2^2} (1 + \omega_1^2) (1 + \omega_2^2) (p_1 + p_2) \quad , \quad (4.17b)$$

die man aus (4.8) und (4.16) erhält². Bei näherer Betrachtung der Formel (4.10) fällt jedoch auf, dass die „Gesamtenergie“ der ungekoppelten Oszillatoren nicht wie üblich aus der Summe der Einzelenergien besteht, sondern aus deren *Differenz*. Oder anders ausgedrückt: Einer der beiden Oszillatoren hat eine negative „Masse“. Jedenfalls ist der kinetische Anteil der Hamiltonfunktion nicht positiv definit. Man darf daher die formale Analogie zu einem mechanischen System und die damit verknüpften anschaulichen Interpretationen nicht überstrapazieren³. Wir sprechen deswegen

²Um präzise zu sein, muss man noch mit dem Faktor C aus (4.14) umskalieren, um die beiden Hamiltonfunktionen in der hier angegebenen Form ineinander überzuführen.

³Ohnehin bezeichnet die Variable x hier eine Ortskoordinate und nicht wie in der klassischen Mechanik die Zeit. Daher haben wir auch die Ausdrücke „Energie“ und „Masse“ in Anführungszeichen gesetzt.

lieber von einer *Quasi-Hamiltonfunktion*. Die Struktur der zugrunde liegenden mathematischen Theorie bleibt jedoch die gleiche. Wichtig ist für uns vor allem die Existenz einer (räumlichen) Erhaltungsgröße, da die Hamiltonfunktion nicht explizit vom Ort abhängt. Wir werden diesen Sachverhalt in den folgenden Kapiteln noch ausnutzen, insbesondere bei der Durchführung der Störungstheorie oberhalb der Instabilitätsschwelle.

4.2 Quasi-Wirkungsfunktional

Unter Einhaltung der eben besprochenen Vorsichtsmaßnahmen können wir nun so verfahren wie in der klassischen Mechanik [Gold] und eine zugehörige (Quasi-) Lagrange-Funktion konstruieren. Da wir später zweckmäßigerweise in den Koordinaten u und v arbeiten werden, geben wir hier nur $L^{(1)}(u, v, u_x, v_x)$ an. Es ist

$$L = T - U \quad (4.18)$$

mit

$$T = -\frac{1}{2}(a u_x^2 + b v_x^2) + b u_x v_x \quad (4.19a)$$

$$U = \frac{1}{2} b v^2 - \frac{1}{2} \gamma u^2 - \frac{1}{3} \beta u^3 - \frac{1}{4} u^4, \quad (4.19b)$$

wie man leicht nachprüft, indem man die kanonischen Impulse (4.8) in (4.6) einsetzt. In der Mechanik definiert man dann das Wirkungsfunktional J als das Integral über die Lagrange-Funktion. Vermöge des Extremalprinzips

$$\delta J = 0 \quad \text{mit} \quad J = \int L(u, v, u_x, v_x) dx \quad (4.20)$$

erhält man aus den zugehörigen Euler-Lagrange Gleichungen

$$0 = \frac{\delta J}{\delta u} = \frac{\partial L}{\partial u} - \left(\frac{\partial L}{\partial u_x} \right)_x \quad 0 = \frac{\delta J}{\delta v} = \frac{\partial L}{\partial v} - \left(\frac{\partial L}{\partial v_x} \right)_x \quad (4.21)$$

die ursprünglichen Differentialgleichungen (4.1) zurück. Dieses Prinzip minimaler Wirkung wird uns bei der Konstruktion von Näherungslösungen in Kapitel 8 noch wertvolle Dienste leisten.

Im Hinblick auf das ursprüngliche System, dessen Lösungseigenschaften wir studieren möchten, muss noch einmal betont werden, dass alle Aussagen dieses Kapitels sich auf die zeitunabhängigen Gleichungen beziehen. Die vollen, zeitabhängigen Bewegungsgleichungen (3.2) lassen sich zwar in der Form

$$-u_t = \frac{\delta J}{\delta u} \quad b v_t = \frac{\delta J}{\delta v} \quad (4.22)$$

schreiben; es ist jedoch nicht möglich, sie gemäß

$$0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_i} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_x \psi_i)} \right) - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_t \psi_i)} \right) \quad (i = 1, 2) \quad (4.23)$$

aus einer echt zeitabhängigen Lagrange-Dichte $\mathcal{L}(\boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\psi}_x, \boldsymbol{\psi}_t)$ mit $\boldsymbol{\psi} = (u, v)$ zu gewinnen. Durch partielle Integration (bei periodischen Randbedingungen) ergibt sich:

$$\partial_t J = - \int (u_t^2 - b v_t^2) dx \quad . \quad (4.24)$$

Die Größe J muss daher im Verlauf der Zeit nicht monoton abnehmen und ist *kein* Lyapunov-Funktional. In der Tat beobachtet man in numerischen Simulationen, dass J beim Einschwingen einer Lösung auf den stationären Zustand sowohl ab- als auch zunehmen kann, je nachdem welcher der beiden Terme im Integranden überwiegt.

Abschließend bemerken wir, dass der Ansatz

$$u = U(\xi) \quad v = V(\xi) \quad \text{mit} \quad \xi := x - ct \quad , \quad (4.25)$$

der einer sich gleichförmig mit Geschwindigkeit c ausbreitenden Lösung entspricht, von (3.2) auf ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen

$$-c U_\xi = -\gamma U - \beta U^2 - U^3 - a U_{\xi\xi} + b V_{\xi\xi} \quad (4.26a)$$

$$-c V_\xi = -V - U_{\xi\xi} + V_{\xi\xi} \quad (4.26b)$$

führt, das aber (außer für $c = 0$) nicht Hamiltonisch ist.

4.3 Literaturumfeld

Die russischen Mathematiker Lerman et al. beschäftigen sich in einer Reihe aufeinander aufbauender Arbeiten [GILe95, GILe97, BGL, BeLe] mit einer verallgemeinerten Swift-Hohenberg Gleichung der Form⁴

$$u_t = \alpha u - (k_c^2 + \partial_x^2)^2 u + \beta u^2 - u^3 \quad . \quad (4.27)$$

Sie geben an, dass die zugehörige stationäre Gleichung sich nach Einführung neuer Variabler

$$u = q_1 \quad u' = q_2 \quad -(u' + u''') = p_1 \quad u + u'' = p_2 \quad (4.28)$$

aus einer Hamiltonfunktion

$$H = p_1 q_2 - k_c^2 p_2 q_1 + \frac{1}{2} p_2^2 + \frac{1}{2} \alpha q_1^2 + w(q_1) \quad (4.29)$$

⁴Die Autoren haben die kritische Wellenzahl k_c auf Eins skaliert, was aber in dem hier vorgestellten Zusammenhang eine Einschränkung der Allgemeinheit darstellen würde.

mit

$$w(q_1) = \frac{1}{3} \beta q_1^3 - \frac{1}{4} q_1^4 \quad (4.30)$$

ableiten lässt. Um den Zusammenhang mit unserem System besser zu verstehen, führen wir die kanonische Transformation

$$p_2 = Q_2 \quad q_2 = -P_2 \quad (4.31)$$

auf die Hamiltonfunktion

$$H = -p_1 P_2 - k_c^2 q_1 Q_2 + \frac{1}{2} Q_2^2 + \frac{1}{2} \alpha q_1^2 + w(q_1) \quad (4.32)$$

durch. Wegen

$$q_1' = \frac{\partial H}{\partial p_1} = -P_2 \quad Q_2' = \frac{\partial H}{\partial P_2} = -p_1 \quad (4.33)$$

lautet die assoziierte Lagrange-Funktion dann

$$L = -q_1' Q_2' + k_c^2 q_1 Q_2 - \frac{1}{2} Q_2^2 - \frac{1}{2} \alpha q_1^2 - w(q_1) \quad (4.34)$$

In der Tat folgt aus den beiden Lagrange-Gleichungen

$$Q_2'' + k_c^2 Q_2 = \alpha q_1 + w'(q_1) \quad (4.35a)$$

$$q_1'' + k_c^2 q_1 = Q_2 \quad (4.35b)$$

mit $q_1 = u$ unmittelbar die zu (4.27) gehörende stationäre Gleichung.

Betrachten wir nun auf der anderen Seite die Hamiltonfunktion unseres Modellsystems aus Abschnitt 4.1.2. Mit den Abkürzungen

$$\delta_1 = 1 + \omega_1^2 \quad \delta_2 = 1 + \omega_2^2 \quad (4.36)$$

können wir auch schreiben:

$$T = \frac{1}{2\delta_1} (x_1')^2 - \frac{1}{2\delta_2} (x_2')^2 \quad V = \frac{\omega_1^2}{2\delta_1} x_1^2 - \frac{\omega_2^2}{2\delta_2} x_2^2 \quad (4.37)$$

Mit den neuen Koordinaten

$$q_1 = u = x_1 - x_2 \quad q_2 = -\Gamma \bar{u} = -\Gamma(x_1 + x_2) \quad (4.38)$$

ergibt sich weiter:

$$2\Gamma \cdot T = \frac{1}{4\Gamma} \left(\frac{1}{\delta_1} - \frac{1}{\delta_2} \right) (\Gamma^2 (q_1')^2 + (q_2')^2) - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\delta_1} + \frac{1}{\delta_2} \right) q_1' q_2' \quad (4.39a)$$

$$2\Gamma \cdot V = \frac{1}{4\Gamma} \left(\frac{\omega_1^2}{\delta_1} - \frac{\omega_2^2}{\delta_2} \right) (\Gamma^2 q_1^2 + q_2^2) - \frac{1}{2} \left(\frac{\omega_1^2}{\delta_1} + \frac{\omega_2^2}{\delta_2} \right) q_1 q_2 \quad (4.39b)$$

Verallgemeinern wir die Betrachtungsweise derart, dass wir δ_1 und δ_2 als unabhängige Parameter ansehen⁵, so folgt im Spezialfall $\delta_1 = \delta_2 = 1$ mit Hilfe der Beziehungen (D.1) für die Lagrange-Funktion $L = T - V - W$ die Form

$$2\Gamma \cdot L = -q'_1 q'_2 - \frac{1}{2}\Gamma^2 q_1^2 - \frac{1}{2}q_2^2 + k_c^2 q_1 q_2 - 2\Gamma W(q_1) \quad . \quad (4.40)$$

Das ist mit $W(q_1)$ gemäß (4.13) bis auf Vorfaktoren genau die Gestalt von (4.34). Sind jedoch δ_1 und δ_2 (wie in unserem Fall) verschieden, so beinhaltet die kinetische Energie T in (4.39) noch weitere Terme. Man sieht nun auch deutlich, dass es genau die *unterschiedlichen* Faktoren $1 + \omega_1^2$ und $1 + \omega_2^2$ auf der rechten Seite der Oszilatorgleichungen (4.2) sind, die zu dem Zusatzterm $\partial_x^2 F(u)$ in der Swift-Hohenberg Gleichung (4.3) führen⁶.

Lerman et al. konzentrieren sich im Wesentlichen auf die stationären Lösungen der Bewegungsgleichung (4.27) für $\alpha < 0$. Im Rahmen einer aufwendigen Bifurkationsanalyse beweisen die Autoren in einem gewissen Parameterbereich auf mathematisch rigorose Art und Weise die Existenz *homokliner Orbits* im vierdimensionalen Phasenraum des zugeordneten Hamiltonischen Systems (4.29), (4.30). Diese entsprechen *lokalisierten Lösungen* von (4.27), ähnlich denjenigen, die wir im nächsten Kapitel für unser System (3.2) vorstellen werden. Insbesondere geben die Autoren das hinreichende Kriterium $\alpha < -\beta^2/3$ für die Nichtexistenz solcher Lösungen an. Anschließend beschreiben sie einen rechenintensiven Algorithmus, mit dem die homoklinen Orbits numerisch verfolgt und ihre eigentliche „Geburtslinie“ (zumindest Teilabschnitte davon) in der (α, β) -Ebene detektiert wurden. Außerdem wurden *heterokline Orbits* numerisch verfolgt. Sie entsprechen *stationären Frontenlösungen* in der Gleichung (4.27). *Wandernde Frontenlösungen* hingegen, die nur von der Kombination $\xi = x - ct$ abhängen, entsprechen heteroklinen Orbits in dem erweiterten, nicht Hamiltonischen System gewöhnlicher Differentialgleichungen, das man mit diesem Ansatz aus (4.27) erhält. Wiederum wird die Existenz solcher Orbits unter gewissen einschränkenden Bedingungen gezeigt. Schließlich wird das Eigenwertspektrum des durch Linearisierung von (4.27) um eine stationäre Lösung $u_0(x)$ entstehenden Differentialoperators untersucht. Durch Anwendung analytischer und numerischer Methoden wird auf die Stabilität von bestimmten zuvor ermittelten Lösungen (stationäre lokalisierte Lösungen und wandernde Fronten) geschlossen. Wenngleich einige beeindruckende, mathematisch exakte Resultate vorgestellt werden, so muss man doch festhalten, dass die praktische Anwendbarkeit beschränkt und letzten Endes auf aufwendige numerische Untersuchungen angewiesen ist. Zudem ist zu erwarten, dass sich viele Beweiselemente durch die Anwesenheit weiterer Parameter und des Zusatztermes $\partial_x^2 F(u)$ in der stationären Swift-Hohenberg Gleichung – wenn überhaupt – nur sehr schwer auf das in der vorliegenden Arbeit betrachtete System übertragen lassen⁷. Wir werden daher einen anderen, mehr praktisch orientierten Weg bei der Behandlung der Lösungstypen einschlagen, über die wir im nächsten Kapitel einen Überblick geben.

⁵Das heißt, wir sehen für den Augenblick von den Relationen (4.36) ab.

⁶Das kann man natürlich auch direkt überprüfen, indem man noch einmal den Verlauf der Rechnung in Abschnitt 3.6 rekapituliert.

⁷Dieser Zusatzterm kann im Allgemeinen auch nicht als kleine Störung behandelt werden.

Kapitel 5

Numerischer Überblick über die Lösungseigenschaften

In diesem Kapitel geben wir einen Überblick über die Lösungen, die bei der numerischen Simulation der zeitabhängigen Grundgleichungen (3.2) auftreten. Dazu legen wir die sekundären Parameter b und β fest und wählen verschiedene Punkte in der (γ, a) -Ebene von Abbildung 5.1 aus. Die Simulationen selbst werden unter Verwendung periodischer oder fester Randbedingungen auf einem endlichen Intervall mit dem Software-Paket MATHEMATICA [Wolf] durchgeführt. Es zeigt sich, dass das numerisch gefundene Lösungsverhalten relativ unempfindlich gegenüber den Parametern des Integrationsalgorithmus ist¹. Da die Größe u zumindest im Rahmen der hier vorgestellten Theorie die wichtigere der beiden dynamischen Variablen (u, v) ist, werden wir meist nur von ihr sprechen.

Betrachten wir zunächst das Verhalten oberhalb der Schwelle sm_1 im Punkt A . Dort gibt es keine stabilen homogenen Lösungen. Unabhängig vom verwendeten Anfangsprofil stellt sich nach einiger Zeit stets ein räumlich periodischer Endzustand wie in Abbildung 5.2 ein². Die Wellenlänge liegt dabei in der Nähe von $2\pi/k_c$ mit der kritischen Wellenzahl k_c gemäß (3.19). Die Amplitude der Schwingungen nimmt mit dem Abstand des Punktes A von der Schwelle zu, welcher durch die Größe Γ charakterisiert wird, siehe die Definition (3.19) und die Diskussion in Abschnitt 3.7. Das ist das typische Verhalten, das man oberhalb einer Soft-Mode Instabilität erwartet. Wir kommen darauf im nächsten Kapitel bei der störungstheoretischen Analyse der stationären Zustände zurück.

Weiter links im Punkt B des Bifurkationsdiagrammes ändert sich das Bild: Bereits

¹MATHEMATICA verwendet die Methode der Linienelemente zur Lösung partieller Differentialgleichungen in $1 + 1$ Dimensionen. Durch Diskretisierung der Ortsvariablen wird ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen erzeugt, das anschließend mit den eingebauten Algorithmen (Runge-Kutta, Gear oder Adams) in der Zeit integriert wird. Die numerischen Parameter wie Diskretisierungsordnung, Rechengenauigkeit oder Schrittweite sind weitgehend frei wählbar.

²In der Praxis genügt ein geringfügig gestörter homogener Anfangszustand, um die Dynamik zu initiieren.

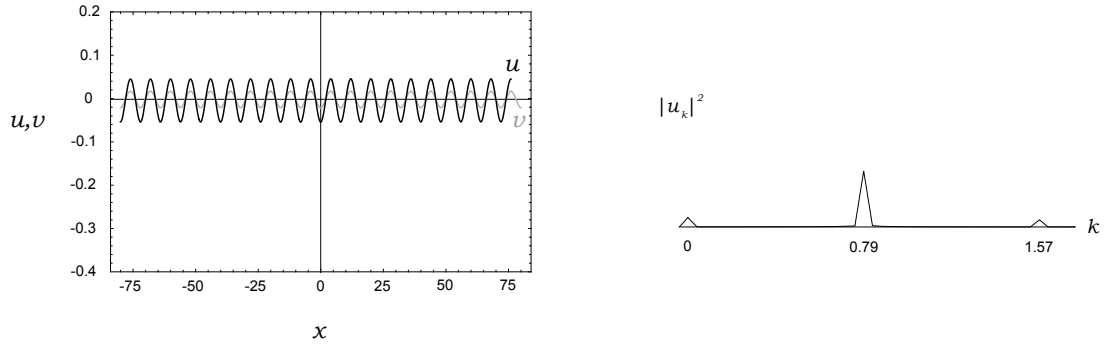


Abbildung 5.2: Räumlich periodischer Endzustand, der sich bei der Simulation der Bewegungsgleichungen (3.2) im Punkt A des Bifurkationsdiagrammes von Abbildung 5.1 einstellt. Rechts daneben das zugehörige, numerisch ermittelte Fourierspektrum.

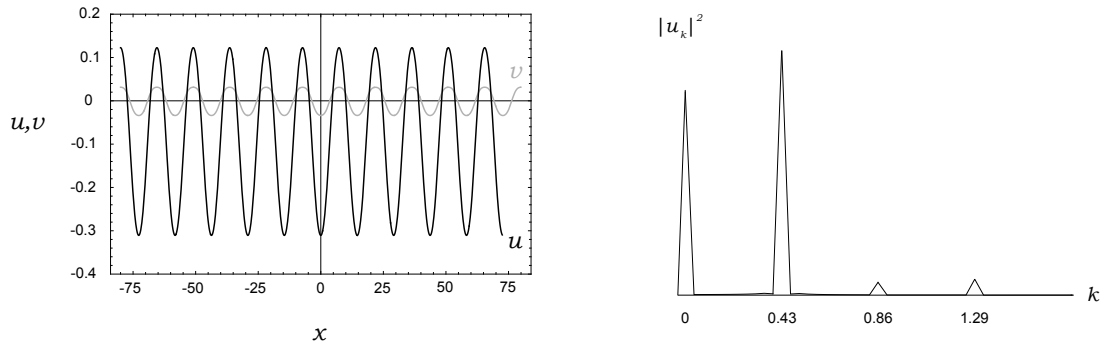


Abbildung 5.3: Räumlich periodischer Endzustand und zugehöriges Fourierspektrum im Punkt B des Bifurkationsdiagrammes.

Abbildung 5.5 sieht. Ihre Konstanz ist in den Simulationen ein guter Indikator für die Beendigung des Einschwingvorganges.

Man kann die *lokalisierten Lösungen* als elementare Anregungen des nichtlinearen Systems auffassen. Mehrere dieser Einzelanregungen lassen sich zu einem komplizierteren stabilen Muster kombinieren, wie in Abbildung 5.6 gezeigt. Bei einer geeigneten periodischen Anfangsverteilung entsteht eine Struktur, die manchmal auch als *solitäres Gitter* bezeichnet wird (natürlich sind auch unregelmäßige Anordnungen realisierbar). Die Gitterkonstante ist variabel bis zu einer bestimmten unteren Grenze, die der „dichtesten Packung“ der Einzelpeaks entspricht⁴. Die Gesamtstruktur sieht in diesem Fall wieder annähernd harmonisch aus. In der Tat unterscheiden sich die Fourierspektren, die zu solchen periodischen Mustern mit minimaler Wellenlänge gehören, kaum von denjenigen aus Abbildung 5.3. In diesem Sinne besteht ein

⁴Verwendet man ein periodisches Anfangsprofil mit noch kleinerer Wellenlänge, dann kommt es entweder zur Verschmelzung und Verschiebung einzelner Wellenzüge, so dass sich schließlich wieder die dichteste Anordnung einstellt, oder aber ein homogener Endzustand entsteht.

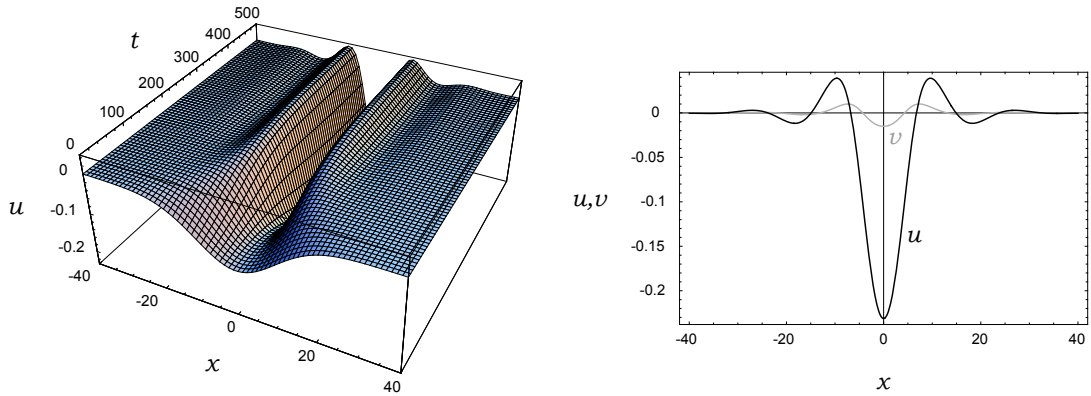


Abbildung 5.4: Zeitabhängige Simulation der Bewegungsgleichungen (3.2) im Punkt E . Das Anfangsprofil ist hier gaußförmig gewählt. Der stationäre Endzustand ist rechts daneben noch einmal im Profil gezeigt.

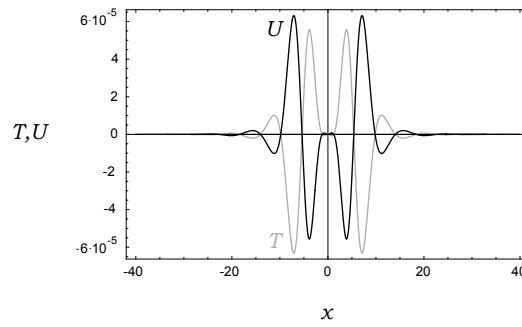


Abbildung 5.5: Überprüfung der Erhaltung von $H = T + U$ gemäß (4.19) anhand des stationären Profils aus Abbildung 5.4. Da die solitären Lösungen für große x schnell abklingen, gilt $H = 0$. Kinetischer und potentieller Anteil kompensieren sich gerade.

kontinuierlicher Übergang zwischen den Punkten B und E oberhalb und unterhalb der Bifurkationslinie sm_1 .

Die eben diskutierten solitären Zustände findet man bei entsprechend gewählten Anfangsbedingungen im gesamten rot unterlegten Gebiet von Abbildung 5.1. Amplitude und Breite der einzelnen Pulse variieren mit den Systemparametern. Unterhalb der unteren Begrenzungslinie loc verschwinden sie zugunsten homogener Endzustände⁵. Jenseits der oberen Begrenzung treten wie besprochen nur periodische Lösungen auf.

Bislang haben wir nur das Gebiet rechts von der Symmetrielinie $\gamma = 2\beta^2/9$ betrachtet, wo sich abwärts gerichtete solitäre Lösungen (negative Amplitude u) einstellen

⁵Die solitären Lösungen werden an der unteren Begrenzungslinie mit *endlicher* Amplitude und Breite „geboren“.

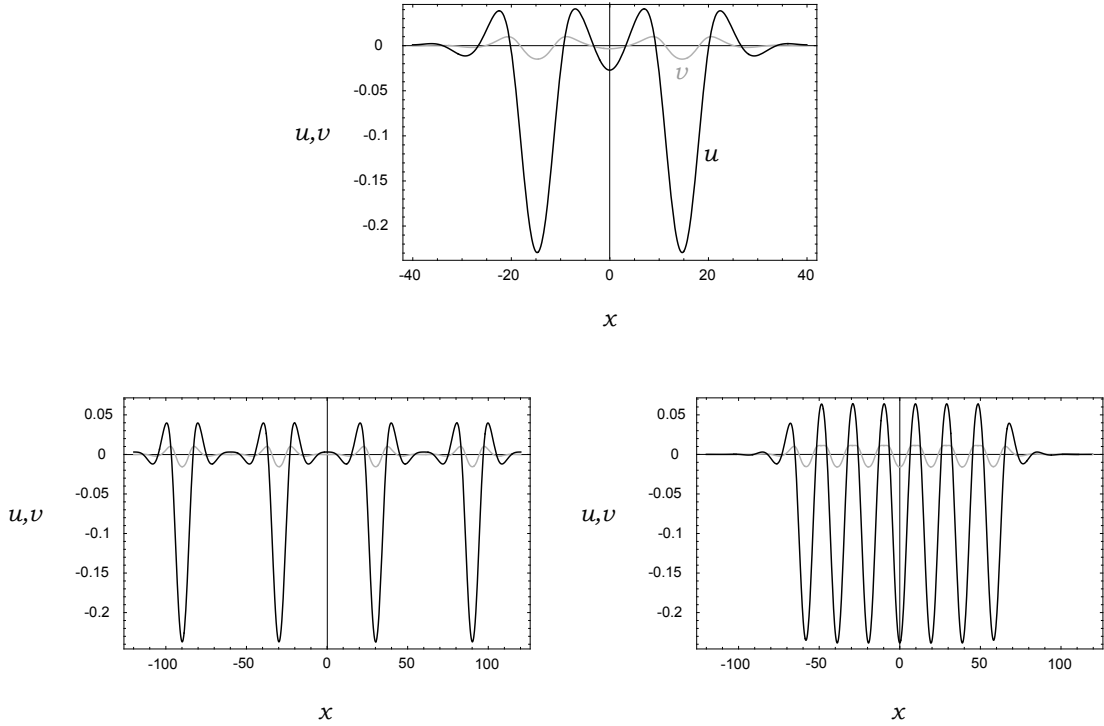


Abbildung 5.6: Verschiedene stationäre Zustände, die sich bei geeigneter Anfangsverteilung im Punkt E einstellen. Oben sieht man einen Zustand, der sich aus zwei benachbarten solitären Einzellösungen aufbaut. Da der Abstand gering ist, kommt es im Zwischenbereich zu Wechselwirkungen. In der Abbildung unten links ist ein reguläres solitäres Gitter mit großen Abständen gezeigt. Rechts ist schließlich ein gitterartiges Paket dargestellt, das der dichtesten Packung der Einzelpeaks entspricht. Es hat im Inneren einen annähernd sinusförmigen Verlauf.

können, welche im Unendlichen auf $u = \xi_1 = 0$ abklingen. Links davon (blaues Gebiet) findet man nach oben zeigende Peaks (positive Amplitude u), die sich asymptotisch der anderen stabilen, homogenen Lösung $u = \xi_3$ gemäß (3.4) annähern. Ein Beispiel ist in Abbildung 5.7 gezeigt. Sinngemäß gilt für diesen Lösungstyp, was bereits für den anderen gesagt wurde, wobei die Rolle der Linie sm_1 nun durch sm_2 übernommen wird⁶. Insbesondere lassen sich die lokalisierten „Up“-Lösungen genau wie die „Down“-Lösungen zu einem periodischen Muster zusammenfügen, wie man ebenfalls in Abbildung 5.7 sieht. Betrachtet man *nur* die annähernd sinusförmigen Lösungen, die durch die dichteste Packung der jeweils elementaren Anregungen zustande kommen, so existiert ein kontinuierlicher Übergang zwischen dem roten und dem blauen Gebiet in Abbildung 5.1. Die Amplitude und Nullpunktverschiebung gegenüber dem Bezugspunkt Null nimmt nach links hin zu.

⁶Die Linie sm_1 hat auf die solitären „Up“-Lösungen genauso wenig Einfluss wie sm_2 auf den „Down“-Typ.

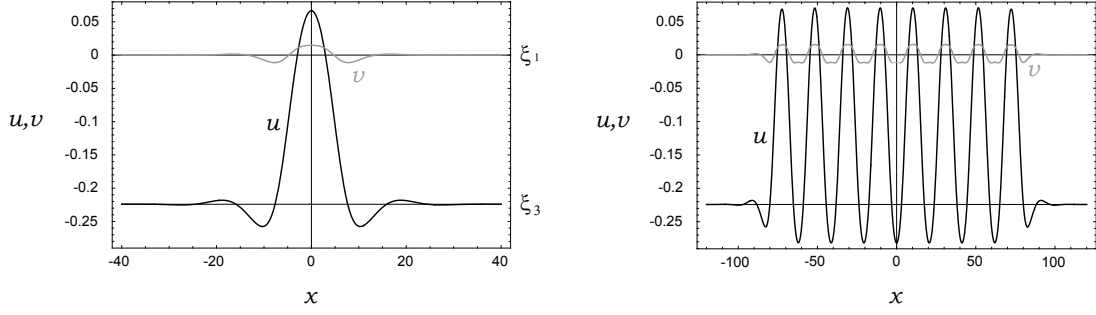


Abbildung 5.7: Einzelner solitärer Endzustand und daraus zusammengesetzte periodische Lösung im Punkt H . Die einzelnen Pulse im blau unterlegten Gebiet von Abbildung 5.1 zeigen nach oben und klingen stets auf die homogene Lösung $u = \xi_3$ ab (siehe auch Abbildung 3.2).

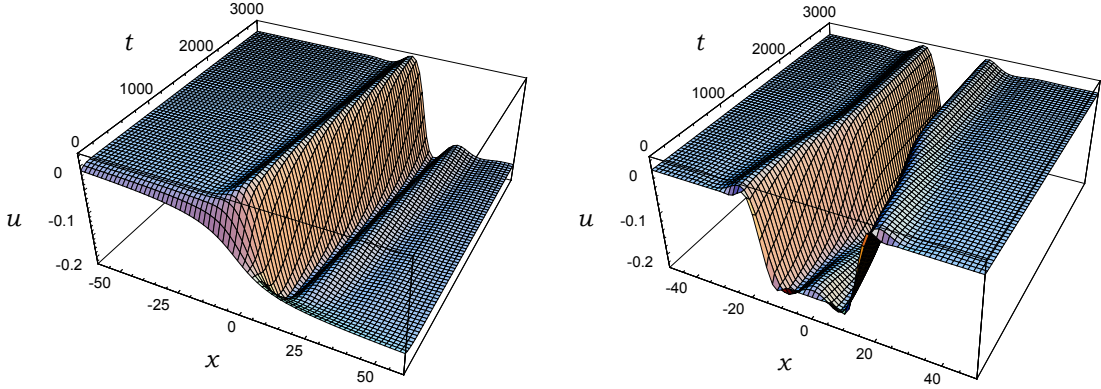


Abbildung 5.8: Frontenlösungen im Punkt F , die man bei stufenförmigen Anfangsprofilen erhalten kann. Im Bild rechts vereinigen sich zwei Fronten zu einem ruhenden solitären Puls.

Es muss noch angemerkt werden, dass die solitären „Down“-Lösungen von der Sattel-Knoten Linie homogener Lösungen bei $\gamma = \beta^2/4$ keinerlei Notiz nehmen. In dieser Hinsicht besteht ein stetiger Übergang zwischen den Punkten E und F (wie er auch für periodische Lösungen bei B und C besteht). Diese Bifurkationslinie spielt insofern eine Rolle, als links davon eine weitere homogene Lösung (nämlich $u = \xi_3$) existiert, in welche die Dynamik relaxieren kann, vorausgesetzt man befindet sich unterhalb der Stabilitätsschwelle sm_2 und wählt einen Anfangszustand, der im Einzugsbereich liegt. Weiterhin findet man im dunkelgrau unterlegten Gebiet von Abbildung 3.3 (unterhalb der beiden Linien sm_1 und sm_2) *Frontenlösungen*, welche die beiden homogenen Zustände miteinander „verbinden“. Aus Abbildung 5.8 ist offensichtlich, dass sich die Fronten mit konstanter Geschwindigkeit bewegen. Die Geschwindigkeit wächst mit dem Abstand zur Symmetrielinie $\gamma = 2\beta^2/9$, wie man in den Simula-

tionen feststellt⁷. Es gibt rechts- und linkslaufende Fronten. Wenn zwei gegenläufige Fronten aufeinander treffen, können sie sich vernichten oder aber – oberhalb der Linie *loc* – wie in Abbildung 5.8 rechts einen (ruhenden) solitären Puls am Ort der „Kollision“ zurücklassen.

Es wird das Ziel der verbleibenden Kapitel sein, die Form der lokalisierten Lösungen genauer zu analysieren und den empirisch gefundenen Existenzbereich in Abhängigkeit von den Parametern zu berechnen. Zuvor müssen wir uns jedoch mit den periodischen Lösungen oberhalb der Schwelle beschäftigen. Wir werden sehen, dass der konventionelle störungstheoretische Ansatz, der im nächsten Kapitel entwickelt wird, bis zu einem gewissen Punkt S auf der Soft-Mode Linie gültig ist. Links davon ist ein nicht-perturbatives Verfahren notwendig, um die Fourierkoeffizienten zu bestimmen. Wie sich herausstellen wird, ist der Punkt S andererseits genau derjenige, in dem das Existenzgebiet der lokalisierten Lösungen endet.

⁷Auf der Symmetrielinie sind „Domänenlösungen“ mit ruhender „Wand“ marginal stabil. Rechts und links davon fangen die Wände an zu wandern, da sich die relativ gesehen stabilere homogene Lösung auf Kosten der anderen auszubreiten versucht.

Kapitel 6

Schwach nichtlineare Analyse

6.1 Periodische Lösungen in der Mittelwertmethode

In diesem Abschnitt wollen wir im Rahmen einer störungstheoretischen Formulierung *stationäre* Lösungen *kleiner Amplitude* des in den vorangegangenen Kapiteln vorgestellten Systems berechnen. Die beiden gekoppelten Oszillatoren (4.2) stellen einen guten Ausgangspunkt dar. Auf diese Form der Differentialgleichungen ist die bewährte *Mittelwertmethode* [Nayf] (auch als „Averaging“ bezeichnet) unmittelbar anwendbar. Durch die kanonische Struktur des Problems wird das Verfahren wesentlich vereinfacht, da nur noch die gemittelte Hamiltonfunktion zu bestimmen ist (eine skalare Funktion anstatt einer zweikomponentigen Vektorfunktion). Anschließend ergeben sich die gesuchten Näherungslösungen daraus im Wesentlichen durch die Ausführung von Differentiationsoperationen. Da der algebraische Aufwand dennoch beträchtlich bleibt, bedienen wir uns des im Buch von Kirchgraber und Stiefel [KiSt] beschriebenen Formalismus, der eine besonders übersichtliche Darstellung ermöglicht. Der Leser möge dieses Buch für die Details der Rechnungen wie auch für die Herleitung der Störungsgleichungen an sich konsultieren. Insbesondere wird dort in Abschnitt 8.5 ein System gekoppelter harmonischer Oszillatoren (Feder-Pendel-System) diskutiert, das unserem sehr ähnlich ist. Wir werden uns an diesem Beispiel orientieren und auf die Unterschiede zu sprechen kommen¹.

Um zum Ausdruck zu bringen, dass das System (4.2) uns in der Nähe des Nullpunkts interessiert, führen wir explizit den Kleinheitsparameter ε ein und setzen $x_i = \varepsilon X_i$ sowie $p_i = \varepsilon P_i$ ($i = 1, 2$). Damit erhalten wir für die zugehörige Hamiltonfunktion:

$$H = H^{(0)} + \varepsilon H^{(1)} + \varepsilon^2 H^{(2)} \quad . \quad (6.1)$$

¹Ein bereits angesprochener Unterschied besteht natürlich darin, dass das Feder-Pendel-System durch gewöhnliche Differentialgleichungen in der *Zeit* beschrieben wird, während bei uns im stationären Fall der *Ort* die Rolle der Variablen übernimmt.

Die einzelnen Anteile sind:

$$H^{(0)} = T + V \quad H^{(1)} = g (X_1 - X_2)^3 \quad H^{(2)} = h (X_1 - X_2)^4 \quad . \quad (6.2)$$

Darin sind die Ausdrücke T und V analog zu (4.10) bzw. (4.12) erklärt und die Kopplungskonstanten g und h wieder durch (4.14) gegeben. Der Parameter Γ sei positiv und vorerst von endlicher Größe. Die Einführung von Winkel- und Wirkungsvariablen ϕ_i und a_i gemäß

$$X_1 = \sqrt{\frac{2a_1}{\alpha_1}} \sin \phi_1 \quad X_2 = \sqrt{\frac{2a_2}{\alpha_2}} \sin \phi_2 \quad (6.3a)$$

$$P_1 = \sqrt{2\alpha_1 a_1} \cos \phi_1 \quad P_2 = \sqrt{2\alpha_2 a_2} \cos \phi_2 \quad (6.3b)$$

mit den Abkürzungen

$$\alpha_1 = \frac{\omega_1}{1 + \omega_1^2} \quad \alpha_2 = \frac{\omega_2}{1 + \omega_2^2} \quad (6.4)$$

bringt den ungestörten Anteil der Hamiltonfunktion auf die Gestalt

$$H^{(0)} = \omega_1 a_1 - \omega_2 a_2 \quad . \quad (6.5)$$

An dieser Stelle fällt das Minuszeichen auf, das im Gegensatz zum Beispiel von Kirchgraber steht. Es ist aber ganz in Einklang mit der bereits in Abschnitt 4.1.3 geführten Diskussion. Den Beitrag erster Ordnung können wir in den neuen Koordinaten wie folgt schreiben:

$$H^{(1)} = g \sum_{(m,n) \in \sigma} A_{mn} \sin(m\phi_1 + n\phi_2) \quad (6.6)$$

mit der Indexmenge

$$\sigma = \{(1, 0), (0, 1), (3, 0), (0, 3), (1, -2), (1, 2), (2, -1), (2, 1)\} \quad (6.7)$$

und den Koeffizienten

$$\begin{aligned} A_{10} &= 3 \left(\frac{a_1}{2\alpha_1} \right)^{1/2} \left(\frac{2\alpha_1 a_2 + \alpha_2 a_1}{\alpha_1 \alpha_2} \right) & A_{01} &= -3 \left(\frac{a_2}{2\alpha_2} \right)^{1/2} \left(\frac{2\alpha_2 a_1 + \alpha_1 a_2}{\alpha_1 \alpha_2} \right) \\ A_{30} &= -2 \left(\frac{a_1}{2\alpha_1} \right)^{3/2} & A_{03} &= 2 \left(\frac{a_2}{2\alpha_2} \right)^{3/2} \\ A_{1-2} &= -3 \left(\frac{a_2}{\alpha_2} \right) \left(\frac{a_1}{2\alpha_1} \right)^{1/2} & A_{12} &= A_{1-2} \\ A_{2-1} &= -3 \left(\frac{a_1}{\alpha_1} \right) \left(\frac{a_2}{2\alpha_2} \right)^{1/2} & A_{21} &= -A_{2-1} \quad . \end{aligned} \quad (6.8)$$

$H^{(1)}$ ist von der Form

$$F = \sum_{\mathbf{n}} F_{\mathbf{n}} \sin(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\phi}) \quad (6.9)$$

mit

$$\mathbf{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{\phi} = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad n_1, n_2 \in \mathbb{Z} \quad . \quad (6.10)$$

Die Grundidee der Mittelwertmethode besteht darin, eine fast-identische Koordinatentransformation $(\boldsymbol{\phi}, \mathbf{a}) \rightarrow (\bar{\boldsymbol{\phi}}, \bar{\mathbf{a}})$ zu finden, so dass das transformierte System nach dem Weglassen von Termen höherer Ordnung möglichst einfach wird. Dies wird durch die Mittelung über die Winkelvariablen $\bar{\boldsymbol{\phi}}$ erreicht. Solange keine Verwechslungsmöglichkeit besteht, verzichten wir allerdings in den Formeln auf die Striche über den neuen Variablen $(\bar{\boldsymbol{\phi}}, \bar{\mathbf{a}})$.

Die Durchführung der Mittelung kann formal durch den Mittelwertoperator M_ϕ dargestellt werden, dessen Wirkung auf die Funktion (6.9) vermöge

$$M_\phi[F] = F_0 \quad (6.11)$$

definiert ist. Er bewirkt das Verschwinden der von $\boldsymbol{\phi}$ abhängigen Terme. Im obigen Fall gilt

$$\bar{H}^{(1)} = M_\phi[H^{(1)}] = 0 \quad , \quad (6.12)$$

so dass wir gezwungen sind, die nächst höhere Ordnung der Störungstheorie zu berücksichtigen. Dort gilt laut Kirchgraber

$$\bar{H}^{(2)} = \frac{1}{2} M_\phi[H^{(1)} \times v^{(1)}] + M_\phi[H^{(2)}] \quad (6.13)$$

mit der Poisson-Klammer

$$u \times v = \sum_{k=1}^2 \left(\frac{\partial u}{\partial \phi_k} \frac{\partial v}{\partial a_k} - \frac{\partial u}{\partial a_k} \frac{\partial v}{\partial \phi_k} \right) \quad (6.14)$$

und der Funktion $v^{(1)}$, die durch Anwendung des Integrationsoperators I_ϕ auf $H^{(1)}$ entsteht:

$$v^{(1)} = I_\phi[H^{(1)}] \quad . \quad (6.15)$$

Dieser Operator wirkt allgemein wie folgt:

$$I_\phi[F] = - \sum_{\mathbf{n} \neq 0} \frac{F_{\mathbf{n}}}{\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\omega}} \cos(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\phi}) \quad , \quad (6.16)$$

wobei der Frequenzvektor $\boldsymbol{\omega}$ durch

$$\boldsymbol{\omega} = \left(\frac{\partial H^{(0)}}{\partial a_1}, \frac{\partial H^{(0)}}{\partial a_2} \right)^T = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ -\omega_2 \end{pmatrix} \quad (6.17)$$

gegeben ist. Man beachte wieder das Minuszeichen in der zweiten Komponente. Konkret hat man hier

$$v^{(1)} = -g \sum_{(m,n) \in \sigma} \frac{A_{mn}}{m \omega_1 - n \omega_2} \cos(m \phi_1 + n \phi_2) \quad (6.18)$$

mit den oben eingeführten Abkürzungen A_{mn} und σ . Das Ergebnis der Prozedur, die man sehr effektiv in einem Programmpaket für symbolische Mathematik wie MATHEMATICA [Wolf] auf dem Computer umsetzen kann, lautet für den ersten Term in (6.13):

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}M_\phi[H^{(1)} \times v^{(1)}] = & \frac{3}{2}g^2 \left(\frac{a_1^2}{\alpha_1^2} \left(\frac{3}{\alpha_2 \omega_2} - \frac{5}{2\alpha_1 \omega_1} + \frac{3\omega_2}{2\alpha_2(\omega_2^2 - 4\omega_1^2)} \right) \right. \\ & \left. + 6 \frac{a_1 a_2}{\alpha_1 \alpha_2} \left(\frac{1}{\alpha_2 \omega_2} + \frac{2\omega_1}{\alpha_1(\omega_2^2 - 4\omega_1^2)} \right) \right) - (1 \leftrightarrow 2). \end{aligned} \quad (6.19)$$

Die Mittelung über $H^{(2)}$ ist einfach:

$$M_\phi[H^{(2)}] = \frac{3}{2}h \left(\frac{a_1^2}{\alpha_1^2} + 2 \frac{a_1 a_2}{\alpha_1 \alpha_2} \right) + (1 \leftrightarrow 2) \quad . \quad (6.20)$$

Das gemittelte System wird in zweiter Ordnung also durch folgende Hamiltonfunktion beschrieben:

$$\bar{H}(\bar{\mathbf{a}}) = \omega_1 \bar{a}_1 - \omega_2 \bar{a}_2 + \varepsilon^2 \bar{H}^{(2)}(\bar{\mathbf{a}}) \quad . \quad (6.21)$$

Die Lösungen der zugehörigen Hamiltonschen Gleichungen

$$(\bar{\phi}_1)_x = \frac{\partial \bar{H}}{\partial \bar{a}_1} \quad (\bar{\phi}_2)_x = \frac{\partial \bar{H}}{\partial \bar{a}_2} \quad (6.22)$$

lauten

$$\bar{\phi}_1 = \Omega_1 x + \varphi_1 \quad \bar{\phi}_2 = -\Omega_2 x + \varphi_2 \quad (6.23)$$

mit Integrationskonstanten φ_1 und φ_2 und den verschobenen Frequenzen²

$$\Omega_1 = \omega_1 + \varepsilon^2 \frac{\partial \bar{H}^{(2)}}{\partial \bar{a}_1} \quad \Omega_2 = \omega_2 - \varepsilon^2 \frac{\partial \bar{H}^{(2)}}{\partial \bar{a}_2} \quad . \quad (6.24)$$

Die andere Hälfte der Hamiltonschen Gleichungen $(\bar{a}_i)_x = 0$ liefert die Konstanz von \bar{a}_1 und \bar{a}_2 (dies gilt sogar in jeder höheren Ordnung der Störungstheorie). Diese Lösungen sind zunächst gemäß

$$\phi_i = \bar{\phi}_i + \varepsilon \frac{\partial v^{(1)}}{\partial \bar{a}_i} \quad a_i = \bar{a}_i - \varepsilon \frac{\partial v^{(1)}}{\partial \phi_i} \quad (i = 1, 2) \quad (6.25)$$

zu transformieren (wobei unter $v^{(1)}$ nun $v^{(1)}(\bar{\mathbf{a}}, \bar{\boldsymbol{\phi}})$ zu verstehen ist), das so erhaltene Resultat ist in (6.3) einzusetzen. Wir bemerken, dass die obige Transformation Ausdrücke der Form $1/\sqrt{\bar{a}_1}$ und $1/\sqrt{\bar{a}_2}$ enthält, die durch die Differentiation nach \bar{a}_1 und \bar{a}_2 entstehen. Die dadurch bewirkten Singularitäten sind letztlich auf die Verwendung der Amplituden- und Winkelvariablen zurückzuführen, wie im Buch von

²Es handelt sich hier eigentlich um Wellenzahlen.

Kirchgraber ausführlich diskutiert wird³. Glücklicherweise existiert ein einfaches, streng begründetes Schema zur *Regularisierung* der bereits berechneten Lösungen. Zu diesem Zweck bildet man den Beginn der formalen Reihenentwicklung von (6.3) nach ε , nachdem man die Ausdrücke (6.25) eingesetzt hat, also z. B. für X_1 :

$$X_1 = \sqrt{\frac{2\bar{a}_1}{\alpha_1}} \sin \bar{\phi}_1 + \varepsilon \sqrt{\frac{2\bar{a}_1}{\alpha_1}} \left(\frac{\partial v^{(1)}}{\partial \bar{a}_1} \cos \bar{\phi}_1 - \frac{1}{2\bar{a}_1} \frac{\partial v^{(1)}}{\partial \bar{\phi}_1} \sin \bar{\phi}_1 \right) . \quad (6.26)$$

Die konkrete Auswertung ergibt

$$X_1 = \sqrt{\frac{2\bar{a}_1}{\alpha_1}} \sin \bar{\phi}_1 + \varepsilon g Y_1 \quad (6.27)$$

mit

$$Y_1 = -\frac{\bar{a}_1}{\alpha_1^2 \omega_1} (3 + \cos(2\bar{\phi}_1)) - \frac{3\bar{a}_2}{\alpha_1 \alpha_2} \left(\frac{1}{\omega_1} - \frac{\omega_1 \cos(2\bar{\phi}_2)}{\omega_1^2 - 4\omega_2^2} \right) - \frac{6}{\alpha_1} \sqrt{\frac{\bar{a}_1 \bar{a}_2}{\alpha_1 \alpha_2}} \frac{\omega_1}{\omega_2} \left(\frac{\cos(\bar{\phi}_1 - \bar{\phi}_2)}{2\omega_1 + \omega_2} + \frac{\cos(\bar{\phi}_1 + \bar{\phi}_2)}{2\omega_1 - \omega_2} \right) . \quad (6.28)$$

Die allgemeine Lösung der stationären, verallgemeinerten Swift-Hohenberg Gleichung (4.3) ist dann im Rahmen der hier gemachten Näherung kleiner Amplituden durch $u = \varepsilon(X_1 - X_2)$ gegeben. Sie ist *biperiodisch* mit Frequenzen Ω_1 und Ω_2 gemäß (6.24) und besitzt entsprechend der Ordnung der Differentialgleichung vier Integrationskonstanten $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \varphi_1, \varphi_2$. *Einfach periodische* Lösungen sind offenbar nur möglich, wenn einer der beiden Oszillatoren in niedrigster Ordnung ausfällt. Welcher das ist, lässt sich innerhalb der stationären Theorie a priori nicht entscheiden. Aus den zeitabhängigen Simulationen des Ausgangssystems (3.2) in der Nähe der Schwelle ist ersichtlich, dass beide Fälle auftreten können, je nach verwendeten Anfangsbedingungen und den numerischen Details⁴. Wir behandeln hier den Fall $\bar{a}_1 = 0$. Das System schwingt dann mit der kleineren der beiden Frequenzen, nämlich $\Omega_2 \approx \omega_2$. Da wir ferner den Kleinheitsparameter ε zu Beginn der Rechnung eingeführt haben, können wir die verbleibende Amplitude \bar{a}_2 frei wählen und setzen wir im Hinblick auf ein möglichst kompaktes Resultat:

$$\bar{a}_1 = 0 \quad \bar{a}_2 = 2\alpha_2 . \quad (6.29)$$

Mit der willkürlichen Festlegung der Phase $\varphi_2 = -\pi/2$ erhalten wir wie in den numerischen Simulationen eine gerade Funktion $u(x)$. Damit lautet das Ergebnis

$$u(x) = 2\varepsilon \cos(\Omega_2 x) + \varepsilon^2 (u_0 + u_2 \cos(2\Omega_2 x)) \quad (6.30)$$

mit den Koeffizienten

$$u_0 = 6g \cdot \frac{\omega_1^2 - \omega_2^2}{\omega_1^2 \omega_2^2} \quad u_2 = -2g \cdot \frac{(\omega_1^2 - \omega_2^2)(1 + 4\omega_2^2)}{\omega_2^2(\omega_1^2 - 4\omega_2^2)} . \quad (6.31)$$

³Die Transformation (6.3) ist im mathematisch strengen Sinne keine Äquivalenztransformation.

⁴Aus dem numerisch erhaltenen Funktionsverlauf von $u(x)$ und $v(x)$ können wir $x_1(x)$ und $x_2(x)$ gemäß (3.36) berechnen.

Die Frequenzverschiebung gegenüber dem ungestörten Fall berechnet sich nach (6.24) wie folgt:

$$\left. \frac{\partial \bar{H}^{(2)}}{\partial \bar{a}_2} \right|_{\substack{\bar{a}_1=0 \\ \bar{a}_2=2\alpha_2}} = \frac{3(1+\omega_2^2)}{\omega_2} \left(2h + g^2 \cdot \frac{(\omega_1^2 - \omega_2^2)(5\omega_1^2 - 4\omega_1^2\omega_2^2 - 24\omega_2^2)}{\omega_1^2\omega_2^2(\omega_1^2 - 4\omega_2^2)} \right). \quad (6.32)$$

Am Auftreten des Kopplungsfaktors h stellt man fest, dass die kubische Nichtlinearität der Ausgangsgleichungen (4.1) nur an dieser Stelle in die Lösung eingeht, nicht aber in die Amplituden u_0 und u_2 .

Die oben beschriebene Methode ist auch auf die gewöhnliche Swift-Hohenberg Gleichung (3.33) anwendbar. Dort gilt $H^{(1)} = 0$, und die niedrigste nichtverschwindende Ordnung der Störungstheorie ist diejenige, die von erster Ordnung bezüglich $H^{(2)}$ ist. Gegenüber der von Eckmann et al. in [CoEc, EcPr] vorgestellten Störungstheorie erscheint unser auf Averaging beruhendes Verfahren systematischer und zieht vollen Nutzen aus der Existenz der Erhaltungsgröße H . Höhere Ordnungen sind prinzipiell (durch Einsatz von Computeralgebra auch in der Praxis) berechenbar, ebenso ist die Behandlung der Resonanz $\omega_1 = 2\omega_2$ möglich, siehe z. B. das Ende von Abschnitt 8.5 im Buch von Kirchgraber [KiSt]. Schließlich sind auch noch die biperiodischen Lösungen in den allgemeinen Formeln enthalten.

Bislang haben wir von den periodischen Lösungen nur die Kleinheit der Amplituden gefordert. Den in (3.19) definierten Parameter Γ , der im Bifurkationsdiagramm (Abbildung 5.1) den Abstand von der Instabilitätsschwelle sm_1 homogener Lösungen charakterisiert, haben wir von endlicher Größe (jedoch unterhalb der Resonanz) angenommen. Diese Vorsichtsmaßnahme schien angebracht, da er auf rechten Seite der Oszillorgleichungen (4.2) wie auch in den Kopplungskonstanten g und h der zugeordneten Hamiltonfunktion im Nenner auftritt. Setzt man nun aber die Beziehung (D.1) und die Konstante g aus (4.14) in die Koeffizienten (6.31) ein, so stellt man fest, dass sich der Faktor Γ heraushebt:

$$u_0 = -\frac{2\beta}{(b-a)} \cdot \frac{1}{\omega_1^2\omega_2^2} = -\frac{2\beta}{\gamma} \quad u_2 = \frac{1}{3} \cdot \frac{2\beta}{(b-a)} \cdot \frac{(1+4\omega_2^2)}{\omega_2^2(\omega_1^2-4\omega_2^2)} \quad (6.33)$$

Analog sieht man, dass der Ausdruck (6.32) lediglich mit $1/\Gamma$ geht. Er muss aber noch mit ε^2 multipliziert werden, um zur geänderten Frequenz (6.24) zu gelangen. Insgesamt bleibt das Ergebnis (6.30) für die Differenzvariable $u = \varepsilon(X_1 - X_2)$ daher auch dann noch vernünftig, wenn Γ selbst von der Größenordnung ε ist, sprich knapp oberhalb der Schwelle sm_1 . Dies war andererseits zu erwarten, denn in den Ausgangsgleichungen (4.1) für die Variablen u und v oder in der Swift-Hohenberg Gleichung (4.3) tritt gar keine Divergenz für $\Gamma = 0$ auf⁵.

Es muss noch einmal betont werden, dass alle Ergebnisse dieses Abschnitts sich auf die stationären Gleichungen beziehen. Da wir die Phase fixiert haben, hängt

⁵Aus den numerischen Simulationen sieht man ferner, dass selbst die Einzelvariablen $x_1 = \varepsilon X_1$ und $x_2 = \varepsilon X_2$ bei Annäherung an die Schwelle *nicht* divergieren.

die Lösung (6.30) nur noch von einer einzigen Integrationskonstanten ε ab. Es gilt speziell:

$$u(0) = 2\varepsilon + \varepsilon^2(u_0 + u_2) \quad . \quad (6.34)$$

Um den Vergleich mit den periodischen Endzuständen aus den *zeitabhängigen* Simulationen der Bewegungsgleichungen (3.2) durchzuführen, lesen wir aus den dort gewonnenen Daten jeweils den numerischen Wert von $u(0)$ ab und bestimmen durch Auflösen der obigen Beziehung den zugehörigen Wert von ε . Damit sind die Fourierkoeffizienten nullter bis zweiter Ordnung und die Wellenlänge im Rahmen der Mittelwertmethode festgelegt und können mit den Simulationsdaten verglichen werden⁶. Genügend weit rechts vom Punkt S aus Abbildung 5.1 skaliert die Amplitude der numerischen Lösungen mit dem Abstand zur Schwelle sm_1 . Daher wird die Übereinstimmung mit wachsendem Abstand schlechter. Quantitativ ist sie bis zu Abständen $\Gamma \lesssim 0,05$ ausgezeichnet. Für $\Gamma \approx 0,1$ liegen die Abweichungen allerdings bereits im 10%-Bereich und zeugen von der Notwendigkeit, höhere Ordnungen im Averaging zu berücksichtigen. Um zu verstehen, wieso man links vom Punkt S die berechneten Lösungen überhaupt nicht vorfindet (es stellen sich wie im letzten Kapitel besprochen periodische Lösungen mit „großer“ Amplitude und stark verschobenem Nullpunkt ein) und wodurch S überhaupt festgelegt ist, müssen wir uns um nächsten Abschnitt mit ihrer Stabilität beschäftigen.

6.2 Stabilität der periodischen Lösungen

Zur Untersuchung der Stabilität einer stationären Lösung $u_s(x)$ greifen wir auf die Gleichungen (3.31) und (3.32) zurück. Einsetzen des Ansatzes

$$u(x, t) = u_s(x) + e^{\sigma t} \delta u(x) \quad (6.35)$$

liefert wegen

$$F(u) = F(u_s) + F'(u_s) e^{\sigma t} \delta u + \dots \quad (6.36)$$

nach Linearisierung in der Abweichung $\delta u(x)$ die Gleichung

$$\begin{aligned} \left(\Gamma^2 - (k_c^2 + \partial_x^2)^2 \right) \delta u &= \frac{1}{b-a} \left(F'(u_s) \delta u - (F'(u_s) \delta u)_{xx} \right. \\ &\quad \left. + \sigma(1 + \gamma + \sigma + F'(u_s)) \delta u - \sigma(1-a)(\delta u)_{xx} \right). \end{aligned} \quad (6.37)$$

Für eine periodische Lösung $u_s(x) = u_s(x+l)$ der Periode l besitzen die Eigenfunktionen dieses Bloch-Problems die Form

$$\delta u(x) = e^{i\kappa x} w(x) \quad w(x) = w(x+l) \quad (6.38)$$

⁶Insbesondere wird das Verhältnis vom nullten zum zweiten Fourierkoeffizienten durch den Quotienten der beiden Ausdrücke (6.33) bestimmt und sollte unabhängig von ε sein.

mit Wellenzahlen $|\kappa| \leq \frac{\pi}{l}$ aus der ersten Brillouin-Zone. Um den Rechenaufwand in erträglichen Grenzen zu halten, werden wir im Folgenden nur die Mode $\kappa = 0$ betrachten, was für unsere Zwecke ausreichend sein wird. Durch Einsetzen der Fourier-Entwicklung

$$w(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} w_n e^{inkx} \quad (6.39)$$

mit $k = \frac{2\pi}{l}$ bringt man Gleichung (6.37) dann auf die Gestalt

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} w_n L_n(k) e^{inkx} = 0 \quad , \quad (6.40)$$

mit den Abkürzungen

$$L_n(k) = \Lambda_n(k) + \frac{1}{b-a} \left((F'(u_s))_{xx} + 2ink(F'(u_s))_x - (1+n^2k^2)F'(u_s) - \sigma(1+\gamma+\sigma+(1-a)n^2k^2+F'(u_s)) \right) \quad (6.41)$$

sowie

$$\Lambda_n(k) = \Gamma^2 - (k_c^2 - n^2k^2)^2 \quad . \quad (6.42)$$

Für die zuletzt eingeführte Größe erweist sich folgende Zerlegung als nützlich:

$$\Lambda_n(k) = \lambda(k) + C_n(k) \quad , \quad (6.43)$$

wobei

$$\lambda(k) = \Gamma^2 - (k_c^2 - k^2)^2 \quad C_n(k) = (1-n^2)k^2((1+n^2)k^2 - 2k_c^2) \quad . \quad (6.44)$$

Konkret setzen wir für $u_s(x)$ die Lösung (6.30) aus dem letzten Abschnitt ein. Bis zu Termen der Ordnung ε^2 gilt (anstatt Ω_2 schreiben wir nun k)

$$u_s(x) = 2\varepsilon \cos(kx) + \varepsilon^2(u_0 + u_2 \cos(2kx)) \quad (6.45)$$

und damit

$$F'(u_s) = 4\beta\varepsilon \cos(kx) + 2\varepsilon^2(\beta u_0 + 3)(1 + \cos(2kx)) \quad . \quad (6.46)$$

Mit der vereinfachten Notation $L_n(k) \rightarrow L(n)$ und $\Lambda_n(k) \rightarrow \Lambda(n)$ werden die weiteren Gleichungen etwas übersichtlicher. Die Größe (6.41) ist nach dem Einsetzen von (6.45) und (6.46) von der Form

$$L(n) = \sum_{m=-2}^2 (B_m(n) - \sigma N(n) \delta_{m0}) e^{imkx} \quad . \quad (6.47)$$

δ_{ij} bezeichnet das Kronecker-Delta. Die Koeffizienten $B_m(n)$ und $N(n)$ ergeben sich nach kurzer Rechnung wie folgt:

$$N(n) = \frac{1}{b-a} (1 + \gamma + \sigma + (1-a)n^2k^2) \quad (6.48)$$

sowie

$$\begin{aligned}
B_0(n) &= \Lambda(n) - \frac{2\varepsilon^2}{b-a}(\beta u_0 + 3)(1 + \sigma + n^2 k^2) \\
B_1(n) &= -\frac{2\beta\varepsilon}{b-a}(1 + \sigma + (n+1)^2 k^2) \\
B_{-1}(n) &= -\frac{2\beta\varepsilon}{b-a}(1 + \sigma + (n-1)^2 k^2) \\
B_2(n) &= -\frac{\varepsilon^2}{b-a}(\beta u_2 + 3)(1 + \sigma + (n+2)^2 k^2) \\
B_{-2}(n) &= -\frac{\varepsilon^2}{b-a}(\beta u_2 + 3)(1 + \sigma + (n-2)^2 k^2) .
\end{aligned} \tag{6.49}$$

Einsetzen von (6.47) in (6.40) führt wegen der linearen Unabhängigkeit des Funktionensystems $\{e^{inkx} \mid n \in \mathbb{Z}\}$ auf die Bedingung

$$\sum_{m=-2}^2 B_m(n-m) w_{n-m} = \sigma N(n) w_n \quad \text{für alle } n \in \mathbb{Z} . \tag{6.50}$$

Mit der für alle $m \in \mathbb{Z}$ gültigen Definition

$$A_m(n) = \begin{cases} \frac{B_m(n)}{N(m+n)} & \text{für } m = -2, -1, 0, 1, 2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \tag{6.51}$$

kann man (6.50) auch so schreiben:

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}} A_{n-m}(m) w_m = \sigma w_n \quad \text{für alle } n \in \mathbb{Z} . \tag{6.52}$$

Das ist nichts anderes als das Eigenwertproblem $\mathbf{A}\mathbf{w} = \sigma\mathbf{w}$ einer unendlich-dimensionalen Bandmatrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \ddots & & & & & \\ & A_0(-2) & A_{-1}(-1) & A_{-2}(0) & 0 & 0 \\ & A_1(-2) & A_0(-1) & A_{-1}(0) & A_{-2}(1) & 0 \\ & A_2(-2) & A_1(-1) & A_0(0) & A_{-1}(1) & A_{-2}(2) \\ & 0 & A_2(-1) & A_1(0) & A_0(1) & A_{-1}(2) \\ & 0 & 0 & A_2(0) & A_1(1) & A_0(2) \\ & & & & & \ddots \end{pmatrix} \tag{6.53}$$

mit Eigenvektoren $\mathbf{w} = (\dots, w_{-2}, w_{-1}, w_0, w_1, w_2, \dots)^T$. Da wir von der Bewegungsgleichung (3.31) ausgegangen sind, die neben der einfachen Zeitableitung u_t auch Terme der Art u_{tt} und u_{txx} enthält, tritt der Eigenwert σ nicht nur explizit auf der

rechten Seite der Eigenwertgleichung auf, sondern auch in den Matrixelementen. In der Nähe der Schwelle ist aber, wie wir noch sehen werden, σ proportional zu ε^2 , so dass wir diese implizite Abhängigkeit vernachlässigen können. Im allgemeinen Fall sollte man besser von den beiden gekoppelten Gleichungen (3.28) ausgehen.

Im Grenzfall $\varepsilon \rightarrow 0$ besitzt die Matrix \mathbf{A} Diagonalgestalt. Ihre Eigenwerte sind dann durch die Diagonalelemente $\Lambda(n)/N(n)$ gegeben. $N(n)$ ist positiv. Direkt an der Schwelle $\Gamma = 0$ gilt ferner $k = k_c$, so dass in (6.43) nur der Anteil $C_n(k_c)$ übrig bleibt. Wegen

$$C_{\pm 1}(k_c) = 0 \quad \text{und} \quad C_n(k_c) < 0 \quad \text{für} \quad n \neq \pm 1 \quad (6.54)$$

existiert neben lauter stabilen Eigenwerten ein zweifach entarteter Nulleigenwert. Wir müssen seine Aufspaltung im Fall $\varepsilon > 0$ berechnen, um eine Aussage über die Stabilität der Lösung (6.45) zu erhalten. Die Rechnung im Anhang E liefert für den kritischen Zweig des aufgespaltenen Eigenwerts in Ordnung ε^2 das Resultat

$$\sigma_+ = -\varepsilon^2 N_0 \left(3 - \frac{2}{9} \cdot \frac{\beta^2}{b k_c^4} (1 + k_c^2)^2 (19 + 4 k_c^2) \right) . \quad (6.55)$$

Dabei bezeichnet N_0 eine positive Konstante. Dieses Ergebnis gilt gemäß der Herleitung auf der Soft-Mode Linie sm_1 , welche durch k_c parametrisiert wird. Für hinreichend kleine Werte von k_c wird der Eigenwert also positiv. Die periodischen Lösungen (6.45) sind dann instabil. Eine ausführlichere Diskussion des Sachverhalts wollen wir ans Ende des nächsten Abschnitts verschieben.

6.3 Ginzburg-Landau Gleichung

Zum Abschluss dieses Kapitels wollen wir die Dynamik unserer Ausgangsgleichungen (3.2) im schwach nichtlinearen Bereich noch kurz aus einem etwas anderen Blickwinkel betrachten, was zur Bestätigung der bisherigen Resultate führen wird. Es ist bekannt, dass für jedes ausgedehnte, räumlich eindimensionale System

$$\partial_t \Phi = \mathcal{L} \Phi + \mathcal{N}[\Phi] \quad \Phi(x, t) \in \mathbb{R}^N \quad , \quad (6.56)$$

wobei $\mathcal{L} \Phi = \sum_{\alpha} \mathbf{L}_{\alpha} \partial_x^{\alpha} \Phi$ (mit reellen Matrizen \mathbf{L}_{α}) den linearen Anteil und $\mathcal{N}[\Phi]$ eine beliebige Nichtlinearität bezeichnet, knapp oberhalb einer Soft-Mode Instabilität eine reduzierte Beschreibung durch eine Ginzburg-Landau Gleichung

$$\partial_{\tau} A = \eta A + D \partial_{\xi}^2 A + r |A|^2 A \quad (6.57)$$

mit reellen Koeffizienten η , D und r formuliert werden kann [CrHo, Mann]. Die Größe $A(\xi, \tau)$ stellt eine Einhüllende dar, die von den langsamen Orts- und Zeitskalen

$$\xi = \varepsilon x \quad \tau = \varepsilon^2 t \quad (6.58)$$

abhängt und vermöge

$$\Phi(x, t) = \varepsilon(\mathbf{u}_c e^{ik_c x} A(\xi, \tau) + c.c.) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \quad (6.59)$$

mit den ursprünglichen, schnell oszillierenden Feldkomponenten verknüpft ist. Dabei bezeichnet der Parameter ε den Abstand zur Bifurkationslinie und k_c die kritische Wellenzahl. Die Matrix

$$\mathbf{L}(k) = \sum_{\alpha} (ik)^{\alpha} \mathbf{L}_{\alpha} \quad . \quad (6.60)$$

legt schließlich an der Schwelle mit $k = k_c$ den kritischen, zum Eigenwert Null gehörenden Eigenvektor \mathbf{u}_c fest (vergleiche Abschnitt 2.1.3).

Die Form der *Amplitudengleichung* (6.57) ist universell und geht nur auf die Symmetrien des Problems und die generischen Eigenschaften des Eigenwertspektrums an der Schwelle zurück, so wie sie im Abschnitt 2.1.3 besprochen wurden. Da die Beträge sämtlicher Koeffizienten auf Eins skaliert werden können, und das Vorzeichen von $\eta > 0$ und $D > 0$ festgelegt ist, verbleibt als signifikante Information das Vorzeichen des kubischen Koeffizienten r . Nur im sättigenden Fall $r < 0$ (auch als superkritisch bezeichnet) besitzt die Ginzburg-Landau Gleichung (6.57) beschränkte Lösungen und gibt die Dynamik des Ausgangssystems korrekt wieder [Tema]. Andernfalls (subkritischer Bereich) werden Terme höherer Ordnung zur Stabilisierung benötigt. Für eine Diskussion des allgemeinen Lösungsverhaltens von (6.57) sei auf die Literatur verwiesen. Wir wollen an dieser Stelle lediglich anmerken, dass die homogene Sättigungslösung $|A_0|^2 = -\eta/r$ idealen, räumlich periodischen Mustern der Wellenlänge k_c in der Ausgangsgleichung (6.56) entspricht.

Um die bisherigen Überlegungen auf unser System (3.2) anzuwenden, müssen wir die konkrete Form des Koeffizienten r , sprich seine Abhängigkeit von den Systemparametern entlang der gesamten Bifurkationslinie sm_1 berechnen. Mit Hilfe der von Just [Just] bereitgestellten, modellunabhängigen Herleitung der Ginzburg-Landau Gleichung reduziert sich der algebraische Aufwand auf die Auswertung allgemeiner Formeln. Die Rechnung ist im Anhang F zusammengefasst und liefert das Resultat

$$r = \frac{r_1 + r_2}{N^2 \rho} \quad (6.61)$$

mit den Abkürzungen (F.17). Die beiden wesentlichen Größen wollen wir an dieser Stelle noch einmal notieren:

$$r_1 = \frac{2}{9} b^2 \beta^2 k_c^4 (1 + k_c^2)^2 (19 + 4 k_c^2) > 0 \quad (6.62a)$$

$$r_2 = -3 b^3 k_c^8 < 0 \quad . \quad (6.62b)$$

Außerdem ist $N^2 \rho \sim k_c^8$. Diese Formeln gelten direkt auf der Bifurkationslinie, die wie in (3.16) durch die kritische Wellenzahl k_c parametrisiert wird. N^2 ist eine Normierungskonstante, die Größe ρ ist im betrachteten Bereich des Bifurkationsdiagrammes von Abbildung 5.1 ebenfalls positiv (der Nulldurchgang für große k_c ist

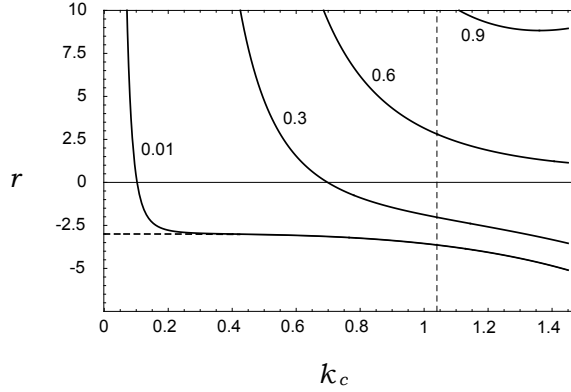


Abbildung 6.1: Verlauf des kubischen Koeffizienten r der Ginzburg-Landau Gleichung als Funktion der kritischen Wellenzahl k_c auf der Soft-Mode Linie sm_1 bei einem festen Wert $b = 1,3$ und verschiedenen Werten von $\beta > 0$. Der Grenzfall $\beta = 0$ ist ebenfalls (gestrichelt) eingezeichnet. Für nicht zu große Werte von β tritt ein Nulldurchgang auf, der dem Übergang von sub- zu superkritischem Verhalten entspricht. Dieser Vorzeichenwechsel legt den Punkt S in Abbildung 5.1 fest. Die weiterhin eingezeichnete gestrichelte vertikale Linie begrenzt den physikalisch relevanten Abschnitt der Bifurkationslinie. Sie korrespondiert zur Horizontalen $a = 1$ in Abbildung 5.1.

nicht mehr relevant). Daher wird das Vorzeichen von r wie in Abbildung 6.1 gezeigt durch die Konkurrenz der beiden Anteile r_1 und r_2 entschieden, von denen der erste auf die quadratische und der zweite auf die kubische Nichtlinearität in (3.2) zurückgeht. Der quadratische Anteil r_1 bewirkt (in Kombination mit dem Nenner $N^2\rho$) die Divergenz des Koeffizienten bei Annäherung an den Kodimension-2 Punkt $k_c = 0$ der kombinierten Sattel-Knoten-/Soft-Mode Bifurkation. Die Bedingung $r = 0$, welche den Übergang von sub- zu superkritischem Verhalten kennzeichnet, stimmt mit dem Ergebnis (6.55) des letzten Abschnitts überein, das an der gleichen Stelle (Punkt S in Abbildung 5.1) den Stabilitätswechsel der periodischen Lösungen aus der Mittelwertmethode vorhersagt. Man sieht an der Abbildung 6.1 auch, dass der Nulldurchgang für größere β nicht mehr, bzw. erst außerhalb des physikalisch relevanten Abschnitts der Soft-Mode Linie auftritt, der durch die Bedingung $a < 1$ (positiv definite Diffusionsmatrix) begrenzt ist. Dann liegt nur noch subkritisches Verhalten vor⁷.

Matthäus hat, ausgehend von einer allgemeinen Bewegungsgleichung (6.56), in der Umgebung des Entartungspunktes $r = 0$ einer Soft-Mode Linie auf systematische Weise die erweiterte Amplitudengleichung

$$A_\tau = \eta A + A_{\xi\xi} + r |A|^2 A - |A|^4 A + i g |A|^2 A_\xi + i h A^2 A_\xi^* \quad (6.63)$$

⁷Dies ist insbesondere immer dann der Fall, wenn wir die Koeffizienten β und γ nicht frei vorgeben können, sondern diese über die Beziehung (A.7) verknüpft sind. Vergleiche die Bemerkung am Ende des Abschnitts 3.1.

abgeleitet und ihr Lösungsverhalten in Abhängigkeit von den Koeffizienten diskutiert [Matt, JMS]. Es wurde nachgewiesen, dass *unterhalb* des *subkritischen* Segments der Bifurkationslinie, für die Ausgangsgleichung die Möglichkeit einer stabilen Koexistenz von räumlich periodischen Lösungen kleiner Amplitude und der trivialen homogenen Lösung besteht (bestimmte Werte der Koeffizienten der Amplitudengleichung vorausgesetzt). Da die Berechnung der Koeffizienten jedoch aufwendig ist, und die Ergebnisse auf die unmittelbare Umgebung des Entartungspunktes beschränkt sind, werden wir im nächsten Kapitel eine andere Methode anwenden, um uns einen globalen Überblick über die periodischen Lösungen unseres Systems zu verschaffen.

Kapitel 7

Nicht-perturbative Methoden

7.1 Harmonische Balance

In diesem Kapitel werden die räumlich periodischen, stationären Lösungen der Bewegungsgleichungen (3.2) diskutiert, die sich einstellen, sobald man die Linie sm_1 des Bifurkationsdiagrammes aus Abbildung 5.1 überschreitet. Wir werden ein Verfahren vorstellen, das eine einheitliche Behandlung der Bereiche rechts *und* links vom Punkt S erlaubt und insbesondere das Übergangsgebiet beinhaltet. Wir wissen bereits aus dem vorigen Kapitel, dass die Lösungen links von S störungstheoretisch im Sinne einer Entwicklung nach kleinen Amplituden nicht zugänglich sind. Andererseits besitzen sie, wie wir im Kapitel 5 gesehen haben, in guter Näherung die einfache Form

$$u(x) = f + g \cos(k_c x) \quad (7.1)$$

mit noch zu bestimmenden Koeffizienten f und g . Höhere Fouriermoden sind praktisch vernachlässigbar. Weiterhin ist die Annahme $k \approx k_c$ selbst in einiger Entfernung von der Schwelle gut erfüllt¹. Schließlich können nun wie im Kapitel 5 besprochen auch unterhalb der Bifurkationslinie sm_1 stabile periodische Lösungen auftreten. Der Fall der „dichtesten Packung“ vieler solitärer Einzellösungen wie in Abbildung 5.6 (rechts unten) wird wiederum durch (7.1) näherungsweise erfasst.

Natürlich kann der obige Ansatz die stationäre Gleichung (4.3) nicht exakt erfüllen. Nur wenn wir die trigonometrischen Entwicklungen

$$u^2 = f^2 + \frac{1}{2}g^2 + 2fg \cos(k_c x) + \frac{1}{2}g^2 \cos(2k_c x) \quad (7.2a)$$

$$u^3 = f^3 + \frac{3}{2}fg^2 + \left(3f^2g + \frac{3}{4}g^3\right) \cos(k_c x) + \frac{3}{2}fg^2 \cos(2k_c x) + \frac{1}{4}g^3 \cos(3k_c x) \quad (7.2b)$$

nach der ersten Harmonischen abbrechen, erhalten wir geschlossene Gleichungen zur Bestimmung von f und g . In Anbetracht der in Kapitel 5 gezeigten numerischen Fou-

¹Man beachte, dass der Ausdruck (3.19) für k_c überall (d. h. nicht nur auf der Bifurkationslinie) definiert ist.

rierspektren, können wir von diesem Verfahren, das als *harmonische Balance* [NaMo] bekannt ist, ausgezeichnete Ergebnisse erwarten. Dies wird sich auch bestätigen.

Vergleich der Fourierkoeffizienten nullter und erster Ordnung ergibt:

$$(\Gamma^2 - k_c^4)(b - a)f = \beta(f^2 + \frac{1}{2}g^2) + f^3 + \frac{3}{2}fg^2 \quad (7.3a)$$

$$\Gamma^2(b - a)g = (1 + k_c^2)(2\beta fg + 3f^2g + \frac{3}{4}g^3) \quad (7.3b)$$

Für $g = 0$ folgen mit (D.2) aus der oberen Gleichung $f^3 + \beta f^2 + \gamma f = 0$ wieder die aus Abschnitt 3.2 bekannten homogenen Lösungen. Wenden wir uns jetzt dem Fall $g \neq 0$ zu und führen die Abkürzung

$$\delta = \frac{\Gamma^2(b - a)}{1 + k_c^2} \quad (7.4)$$

ein, welche man als umskalierten Abstand zur Bifurkationslinie sm_1 auffassen kann. Aus der unteren der beiden Gleichungen (7.3) wird damit:

$$g^2 = \frac{4}{3}(\delta - 2\beta f - 3f^2) \quad (7.5)$$

Einsetzen in die obere Gleichung liefert dann eine kubische Gleichung für f alleine:

$$f^3 + \beta f^2 - \frac{1}{5}(\gamma + 2\delta - \frac{4}{3}\beta^2)f - \frac{2}{15}\beta\delta = 0 \quad (7.6)$$

Durch die Transformation

$$y = f + \frac{1}{3}\beta \quad (7.7)$$

und die Umskalierung

$$\gamma = \frac{1}{3}\beta^2\bar{\gamma} \quad \delta = \frac{1}{3}\beta^2\bar{\delta} \quad y = \frac{1}{3}\beta Y \quad g = \frac{2}{3}\beta G \quad (7.8)$$

bringt man das Gleichungssystem (7.3) auf die Gestalt

$$0 = Y^3 + 3PY + 2Q \quad (7.9a)$$

$$G^2 = 1 + \bar{\delta} - Y^2 \quad (7.9b)$$

mit

$$3P = -\frac{3}{5}(\bar{\gamma} + 2\bar{\delta} + 1) \quad 2Q = \frac{3}{5}(\bar{\gamma} - \frac{2}{3}) \quad (7.10)$$

Eine analytische Diskussion der kubischen Gleichung für Y in Abhängigkeit von den beiden verbliebenen Parametern $\bar{\gamma}$ und $\bar{\delta}$ ist möglich und liefert weitere Einsichten. Zu diesem Zweck berechnen wir die Diskriminante $D = Q^2 + P^3$. Es ist

$$5^3 \cdot D = \frac{45}{4}(\bar{\gamma} - \frac{2}{3})^2 - (\bar{\gamma} + 2\bar{\delta} + 1)^3 \quad (7.11)$$

Für $D > 0$ liegt eine reelle Lösung vor, für $D < 0$ gibt es drei. Weiterhin beachte man, dass der Ansatz (7.1) nur für positiv reelles k_c sinnvoll ist. Daher muss $a > \gamma$ sein², und somit $\bar{\delta} > -\bar{\gamma}$. Damit gilt aber in dem Bereich, der uns interessiert, auch $P < 0$ (siehe unten). Es gibt nun in der $(\bar{\gamma}, \bar{\delta})$ -Ebene von Abbildung 7.1 drei Linien, auf denen die Lösungen der kubischen Gleichung eine einfache Form annehmen:

²Wir haben ferner stets $a < b$ vorausgesetzt.

- Die Linie $\bar{\gamma} = \frac{2}{3}$, die der Symmetrielinie $\gamma = \frac{2}{9}\beta^2$ in den Abbildungen 3.3 und 5.1 entspricht. Dort ist $Q = 0$ und deshalb $Y(Y^2 + 3P) = 0$. Also gibt es die Lösungen

$$Y_1 = 0 \quad Y_2 = +\sqrt{1 + \frac{6}{5}\bar{\delta}} \quad Y_3 = -\sqrt{1 + \frac{6}{5}\bar{\delta}} \quad . \quad (7.12)$$

Im Folgenden werden wir uns auf das Gebiet rechts von dieser Linie beschränken, in dem $Q > 0$ ist.

- Die Linie $\bar{\delta} = 0$, die gerade die Soft-Mode Linie sm_1 darstellt. Hier faktorisiert die kubische Gleichung wie folgt:

$$(Y - 1)(5Y^2 + 5Y + 2 - 3\bar{\gamma}) = 0 \quad . \quad (7.13)$$

Somit gibt es die Lösungen

$$Y_1 = \frac{1}{2} \left(-1 + \sqrt{\frac{3}{5}(4\bar{\gamma} - 1)} \right) \quad Y_2 = 1 \quad Y_3 = \frac{1}{2} \left(-1 - \sqrt{\frac{3}{5}(4\bar{\gamma} - 1)} \right) . \quad (7.14)$$

- Und schließlich die Linie $D = 0$ (auch mit *loc* bezeichnet), auf der zwei reelle Lösungen entstehen. In den Koordinaten $\bar{\gamma}$ und $\bar{\delta}$ wird diese Linie durch

$$2\bar{\delta} = \frac{3}{2} \sqrt[3]{\frac{10}{3}} \left(\bar{\gamma} - \frac{2}{3} \right)^{2/3} - 1 - \bar{\gamma} \quad (7.15)$$

beschrieben. Die Cardanischen Formeln reduzieren sich dann auf:

$$Y_1 = Y_2 = +\sqrt{|P|} = \sqrt[3]{\frac{3}{10} \left(\bar{\gamma} - \frac{2}{3} \right)} \quad Y_3 = -2\sqrt{|P|} = -2 \sqrt[3]{\frac{3}{10} \left(\bar{\gamma} - \frac{2}{3} \right)} . \quad (7.16)$$

Die obigen Lösungen sind in der Reihenfolge so angeordnet, dass an den Schnittpunkten von je zwei der Linien ein stetiger Übergang zwischen den Formeln mit gleichen Indizes besteht. Der Vollständigkeit halber sind in Abbildung 7.1 auch noch die bereits aus Abbildung 3.3 bekannte Sattel-Knoten Linie $\bar{\gamma} = \frac{3}{4}$ bzw. $\gamma = \frac{1}{4}\beta^2$ der homogenen Lösungen und die zweite Soft-Mode Linie sm_2 eingezeichnet, welche man ebenfalls auf die neuen Koordinaten umrechnen kann. Wie man sieht, berühren sich die Linien sm_1 und *loc* im Punkt S' bei $\bar{\gamma} = 4$ bzw. $\gamma = \frac{4}{3}\beta^2$.

Um die ursprüngliche Frage zu beantworten, wie die Fourierkoeffizienten f und g der periodischen Lösungen von den Systemparametern abhängen, stellt man fest, dass der *relevante* Lösungszweig der kubischen Gleichung (7.9a) durch die Forderung nach reellem g bzw. G gemäß (7.9b) festgelegt wird. Auf der Linie sm_1 ist diese Forderung für $\bar{\gamma} > 4$ nur durch $Y_2 = 1$ erfüllbar. Für $\frac{2}{3} \leq \bar{\gamma} \leq 4$ kommen zunächst sowohl Y_1 als auch Y_2 entsprechend den Formeln (7.14) in Frage. Y_3 spielt keine Rolle. Zur endgültigen Klärung der Situation in diesem Abschnitt muss man daher das Verhalten der Lösungen für positives $\bar{\delta}$ betrachten. Eine kurze Rechnung im Anhang G, bei der bis zur quadratischen Ordnung um die Lösungen Y_1 und Y_2

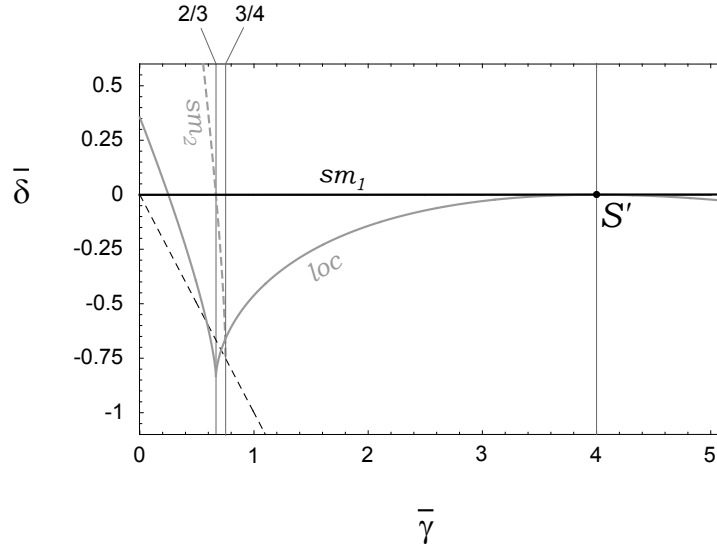


Abbildung 7.1: Bifurkationsdiagramm in der $(\bar{\gamma}, \bar{\delta})$ -Ebene. In diesen Koordinaten ist die Soft-Mode Linie sm_1 durch die Gerade $\bar{\delta} = 0$ gegeben. Die in der Näherung der harmonischen Balance mit einer Fouriermode berechnete Linie loc begrenzt den Existenzbereich periodischer Lösungen nach unten. Der Ansatz verliert unterhalb der Geraden $\bar{\delta} = -\bar{\gamma}$ (d. h. $k_c = 0$) seine Gültigkeit.

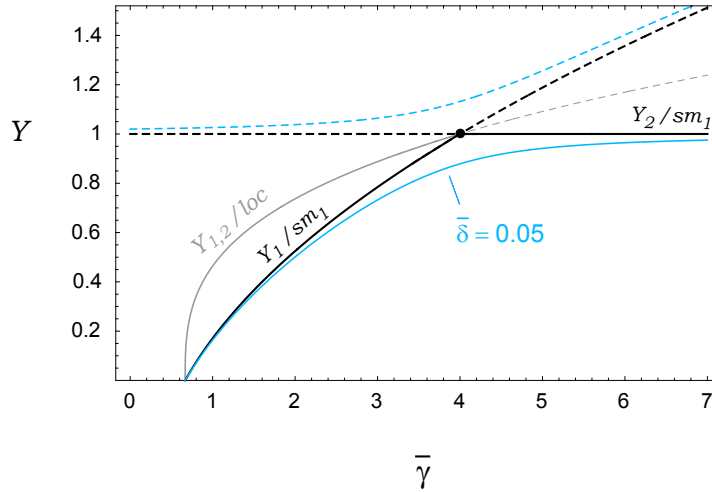


Abbildung 7.2: Verlauf der Lösungen der kubischen Gleichung (7.9a) auf den Bifurkationslinien sm_1 und loc aus Abbildung 7.1 sowie entlang einer Linie $0 < \bar{\delta} = \text{const.}$ Die relevanten Lösungen sind durchgezogen gezeichnet (ein weiterer, irrelevanter Lösungszweig ist nicht eingezeichnet).

entwickelt werden muss, zeigt dass es für $0 < \bar{\delta} \ll 1$ zur Aufspaltung der Lösungszweige kommt, ähnlich wie bei der *Hybridisierung* zweier sich kreuzender Niveaus in der Atomphysik. Der Ausdehnungsbereich dieses Gebietes ist von der Größenordnung $\sqrt{\bar{\delta}}$. Nur einer der beiden entstehenden Zweige genügt der Bedingung $G^2 \geq 0$. Das Verhalten ist in Abbildung 7.2 dargestellt. Man sieht nun, dass die relevante Lösung auf der Soft-Mode Linie sm_1 im Bereich $\frac{2}{3} \leq \bar{\gamma} \leq 4$ durch Y_1 gemäß (7.14) gegeben ist. Ähnliche Überlegungen lassen sich auch im Gebiet $\bar{\delta} < 0$ anstellen, um die richtige Lösung auszusondern. Insbesondere ist $Y_1 = Y_2$ auf dem Abschnitt der Bifurkationslinie *loc* links vom Punkt S' . Unterhalb davon gibt es keine Lösung. Das gleiche gilt unterhalb von sm_1 im Bereich $\bar{\gamma} > 4$.

Bei bekanntem Y erhält man anschließend f und g vermöge

$$f = \frac{1}{3}\beta(Y - 1) \quad g = -\frac{2}{3}\beta\sqrt{1 + \bar{\delta} - Y^2} \quad . \quad (7.17)$$

Abbildung 7.3 zeigt die numerisch bestimmten Höhenlinien der beiden Koeffizienten in der gesamten $(\bar{\gamma}, \bar{\delta})$ -Ebene. Im Punkt S' ändert sich das Verhalten des Systems: Links davon entstehen bei infinitesimalem Überschreiten der Soft-Mode Linie sm_1 immer periodische Lösungen *endlicher* Amplitude, so wie wir es in den Simulationen von Kapitel 5 gesehen haben. Der Punkt S' liegt bei $\bar{\gamma} = 4$ bzw. $\gamma = \frac{4}{3}\beta^2$. Das entspricht näherungsweise dem Punkt S aus dem letzten Kapitel, in dem der kubische Koeffizient der zugeordneten Ginzburg-Landau Gleichung einen Nulldurchgang hat und die im Rahmen der Mittelwertmethode berechneten periodischen Lösungen kleiner Amplitude instabil werden. Die kleine Diskrepanz zwischen den beiden Punkten rührt daher, dass im Verfahren der harmonischen Balance nur die führende (erste) Fouriermode mitgenommen wurde, während die Rechnung in Kapitel 6 noch die zweite Harmonische berücksichtigt. Konzeptionell handelt es sich aber um den selben Punkt.

Auch die periodischen Lösungen unterhalb der Schwelle sm_1 werden durch das Gleichungssystem (7.3) bzw. (7.9) erfasst. Der tatsächliche stationäre (End-) Zustand hängt dort zwar vom gewählten Anfangsprofil ab, jedoch korrespondiert die Existenz stabiler periodischer Lösungen, wie wir gesehen haben, zur Existenz einzelner lokalisierter Lösungen, aus denen sie sich durch Überlagerung aufbauen. Auf diese Weise stellt die Linie *loc* eine erste Näherung für die Geburtslinie lokalisierter Lösungen dar. Wir werden diese Näherung im nächsten Abschnitt noch verbessern.

Das gesamte bisherige Verfahren lässt sich auch durchführen, wenn man die Gleichungen (B.3) von Anhang B zum Ausgangspunkt nimmt. Diese kommen dadurch zustande, dass man die homogene Lösung $u = \xi_3$ (sofern sie existiert, vergleiche Abbildung 3.2) als Referenzlösung in den Koordinatenursprung verschiebt. Das System (B.3) ist von gleicher Form wie das ursprüngliche System (3.2) und geht aus ihm durch die Substitution der Parameter $\beta \rightarrow \hat{\beta}$ und $\gamma \rightarrow \hat{\gamma}$ gemäß (B.4) hervor. Dies bedingt eine Renomierung aller weiteren eingeführten Abkürzungen, insbesondere $k_c \rightarrow \hat{k}_c$ und $\Gamma \rightarrow \hat{\Gamma}$. Ansonsten verläuft die Rechnung aber vollkommen analog zu der weiter oben vorgestellten. Die Gleichungen der harmonischen Balance, die

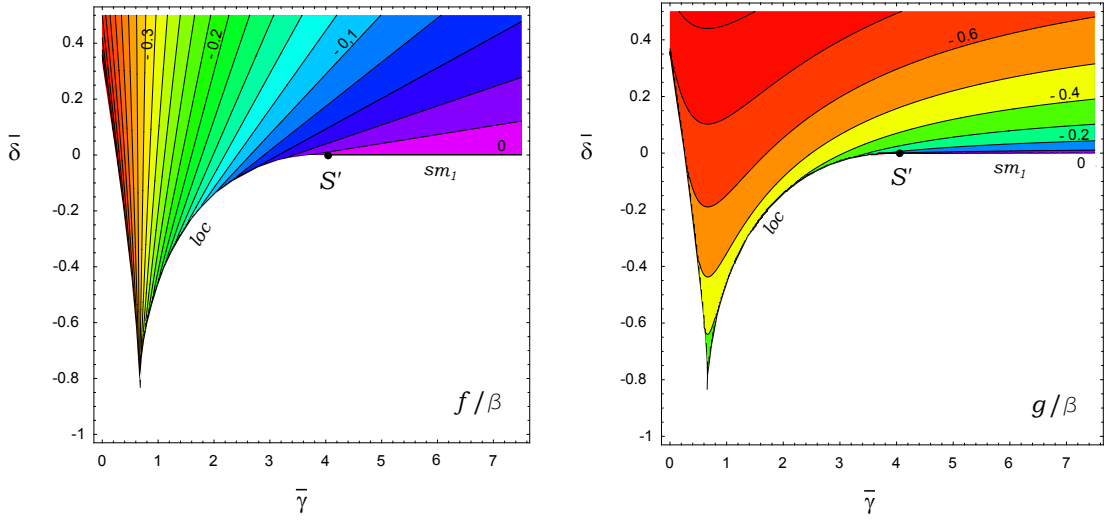


Abbildung 7.3: Höhenlinien der Fourierkoeffizienten f und g in der Näherung der Harmonischen Balance in Abhängigkeit von den beiden Parametern $\bar{\gamma}$ und $\bar{\delta}$. Im weißen Gebiet unterhalb der Linien sm_1 und loc existiert keine Lösung. Links von Punkt S' entstehen die Lösungen an der Linie loc mit endlicher Amplitude.

das modifizierte Verfahren liefert, sind zwar nicht identisch mit den ursprünglichen, jedoch sind die numerischen Unterschiede in den Ergebnissen nach Einsetzen typischer Zahlenwerte (wie etwa in Abbildung 5.1) so gering, dass auf eine ausführlichere Diskussion an dieser Stelle verzichtet wird.

7.2 Variationsverfahren

Wir können die Ergebnisse des letzten Abschnitts auch auf eine andere Weise erhalten, die sich besser für Erweiterungen eignet. Wie wir wissen, erfüllen die exakten stationären Lösungen der Gleichungen (3.2) das in Abschnitt 4.2 angegebene Extremalprinzip (4.20). Unsere Näherung besteht nun darin, dass wir – wiederum gestützt auf die numerisch gewonnenen Erkenntnisse – nur Funktionen der Form (7.1) zur Konkurrenz im Wirkungsfunktional (4.19), (4.20) zulassen. In diesem eingeschränkten Funktionenraum müssen wir den Wert des Funktionals in Abhängigkeit von den beiden *Variationsparametern* f und g berechnen und anschließend minimieren.

Zuerst verschaffen wir uns durch Integration der Gleichung

$$v_{xx} - v = u_{xx} \quad (7.18)$$

die zu (7.1) gehörige Funktion $v(x)$. Es ist:

$$v(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + \frac{g k^2}{1 + k^2} \cos(kx) \quad . \quad (7.19)$$

Zur Vorbereitung späterer Verallgemeinerungen schreiben wir für die Wellenzahl einfach k , meinen hier aber noch stets k_c . Um beschränkte Lösungen für $x \rightarrow \pm\infty$ zu erhalten, müssen wir den homogenen Lösungsanteil verwerfen:

$$C_1 = C_2 = 0 \quad . \quad (7.20)$$

Damit berechnet man aus (4.19) – es genügt die Integration über eine Periode:

$$\int_{-\pi/k}^{\pi/k} T(x) dx = \frac{\pi k g^2}{2(1+k^2)^2} \left(b k^2 (2+k^2) - a(1+k^2)^2 \right) \quad (7.21a)$$

$$\int_{-\pi/k}^{\pi/k} U(x) dx = \frac{\pi}{48 k (1+k^2)^2} \left(24 b k^4 g^2 - p(f, g) (1+k^2)^2 \right) \quad (7.21b)$$

mit der Abkürzung

$$p(f, g) = 24 f^4 + 9 g^4 + 72 f^2 g^2 + 32 \beta f^3 + 48 \beta f g^2 + 48 \gamma f^2 + 24 \gamma g^2 \quad . \quad (7.22)$$

Mit $L = T - U$ und $H = T + U$ folgt weiter

$$J_0 = \int_{-\pi/k}^{\pi/k} L(x) dx = \frac{\pi}{48 k} p(f, g) - \pi k g^2 \cdot \frac{a - (b-a)k^2}{2(1+k^2)} \quad (7.23)$$

und analog

$$E_0 = \int_{-\pi/k}^{\pi/k} H(x) dx = -\frac{\pi}{48 k} p(f, g) - \pi k g^2 \cdot \frac{a(1+k^2)^2 - b k^2 (3+k^2)}{2(1+k^2)^2} \quad . \quad (7.24)$$

Minimierung von J_0 bedeutet jetzt

$$\frac{\partial J_0}{\partial f} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial J_0}{\partial g} = 0 \quad (7.25)$$

und somit

$$0 = 2f^3 + 3fg^2 + 2\beta f^2 + \beta g^2 + 2\gamma f \quad (7.26a)$$

$$0 = g \left((1+k^2)(12f^2 + 3g^2 + 8\beta f + 4(\gamma - a k^2)) + 4b k^4 \right) \quad . \quad (7.26b)$$

Mit $k = k_c$ und der Beziehung (D.4) ist dieses Gleichungssystem, wie nicht anders zu erwarten, identisch mit (7.3).

Die Bifurkationslinien aus Abbildung 7.1 können wir nun auch durch folgende Überlegung erhalten: Lokale Minima *entstehen* durch eine Sattel-Knoten Bifurkation, wenn die zusätzliche Gleichung

$$\Delta = 0 \quad \text{mit} \quad \Delta = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 J_0}{\partial f^2} & \frac{\partial^2 J_0}{\partial f \partial g} \\ \frac{\partial^2 J_0}{\partial g \partial f} & \frac{\partial^2 J_0}{\partial g^2} \end{pmatrix} \quad (7.27)$$

erfüllt ist. Die obige Matrix ist in der Differentialrechnung mehrerer Veränderlicher als Hesse-Matrix bekannt. Wertet man diese Gleichung mit dem Funktional (7.23) aus, und setzt die Umkehrung der Definition (7.4)

$$a = -\gamma - \delta - \sqrt{\delta^2 + 4b(\gamma + \delta)} \quad (7.28)$$

sowie die Ausdrücke (7.7), (7.8) und $G^2 = 1 + \bar{\delta} - Y^2$ ein, so folgt nach längerer Rechnung:

$$(1 + \bar{\delta} - Y^2)(1 + \bar{\gamma} + 2\bar{\delta} - 5Y^2)\left(6b + \beta^2\bar{\delta} + \beta\sqrt{(\beta\bar{\delta})^2 + 12b(\bar{\gamma} + \bar{\delta})}\right) = 0. \quad (7.29)$$

Der letzte der drei Faktoren kann nur für $\bar{\gamma} = 3b/\beta^2$ bzw. $\gamma = b$ verschwinden, was außerhalb des von uns betrachteten Bereiches liegt. Zur Diskussion der beiden anderen Faktoren betrachten wir noch einmal die kubische Gleichung (7.9a). Ausgeschrieben lautet sie

$$5Y^3 - 3Y(1 + \bar{\gamma} + 2\bar{\delta}) - 2 + 3\bar{\gamma} = 0 \quad . \quad (7.30)$$

Umstellen nach $\bar{\delta}$ ergibt dann

$$\bar{\delta} = \frac{1}{6Y}(Y - 1)(5Y^2 + 5Y + 2 - 3\bar{\gamma}) \quad . \quad (7.31)$$

Damit kann man die ersten beiden Faktoren in (7.29) wie folgt schreiben:

$$1 + \bar{\delta} - Y^2 = -\frac{1}{6Y}(Y - 1)(Y^2 + Y - 2 + 3\bar{\gamma}) \quad (7.32a)$$

$$1 + \bar{\gamma} + 2\bar{\delta} - 5Y^2 = -\frac{1}{3Y}(10Y^3 + 2 - 3\bar{\gamma}) \quad . \quad (7.32b)$$

Das Verschwinden des oben stehenden Terms führt auf die beiden Soft-Mode Linien sm_1 und sm_2 , an denen wir im Moment nicht weiter interessiert sind³. Verschwinden des unten stehenden Ausdrucks liefert für $\bar{\gamma} \geq \frac{2}{3}$ wieder die reelle Lösung $Y = \sqrt[3]{\frac{3}{10}(\bar{\gamma} - \frac{2}{3})}$ und mit (7.31) die Bifurkationslinie *loc* in der Form (7.15).

Damit ist das gesamte Bifurkationsdiagramm aus Abbildung 7.1 im Wirkungsfunktional (7.23) enthalten. Abbildung 7.4 veranschaulicht, wie die zu homogenen ($g = 0$) oder periodischen ($g \neq 0$) Lösungen gehörenden lokalen Minima im Höhenliniendiagramm des Funktional in Abhängigkeit von den beiden Variationsparametern f und g auszumachen sind. Im Hinblick auf die Linie *loc*, die man wie bereits besprochen auch als Geburtslinie lokalisierter Lösungen interpretiert, muss man feststellen, dass die Näherung $k = k_c$ mit zunehmendem Abstand zur Bifurkationslinie sm_1 schlechter wird. Insbesondere versagt der Ansatz (7.1) für $a < \gamma$, weil dort k_c imaginär ist. Wir wollen deshalb nun eine Erweiterung der Methode vornehmen.

³Gleichung (7.27) stellt eine notwendige Bedingung für das Auftreten von Sattel-Knoten Bifurkationen dar, enthält aber auch noch andere Fälle, bei denen sich der Charakter lokaler Extrempunkte ändert. Die Linie sm_1 wird exakt reproduziert, weil dort auch die Annahme $k = k_c$ exakt gültig ist, sm_2 in sehr guter Näherung.

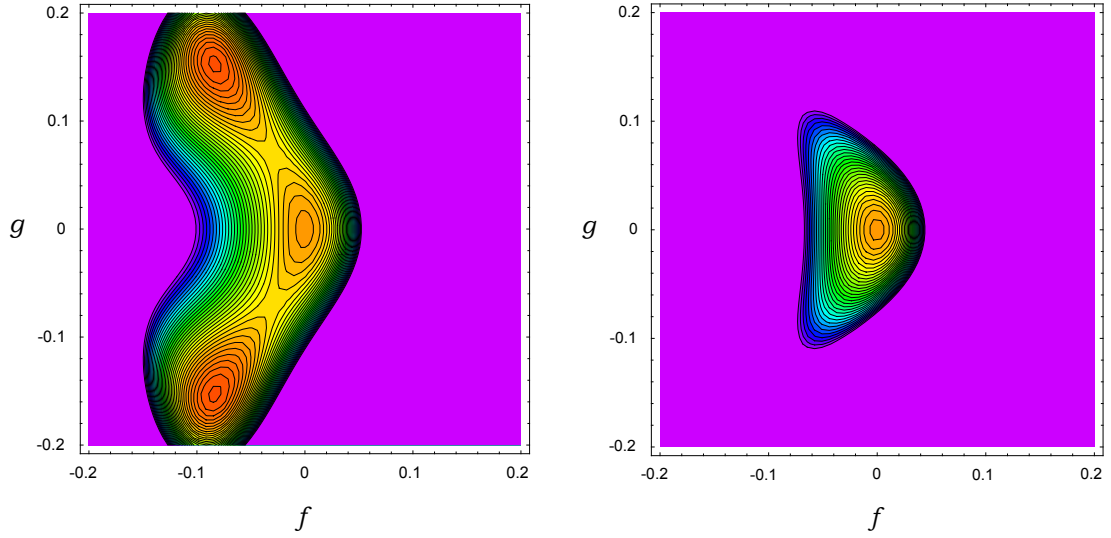


Abbildung 7.4: Höhenlinien des Wirkungsfunktional J_0 in Abhängigkeit von den beiden Variationsparametern (Fourierkoeffizienten) f und g . Die tiefstliegenden Gebiete sind rot eingefärbt. Das linke Diagramm gehört zum Punkt E aus Abbildung 5.1. Dort besitzt das Funktional zwei lokale Minima bei $(f_0 | g_0) \approx (-0,08 | -0,15)$ und $(0 | 0)$, welche periodischen Lösungen bzw. der homogenen Lösung $u = 0$ entsprechen (da die Phase der periodischen Lösungen willkürlich ist, ist das Funktional symmetrisch in g). Im Punkt G (rechtes Diagramm) gibt es nur noch das zuletzt genannte Minimum. Das erste ist an der Linie *loc* durch eine Sattel-Knoten Bifurkation vernichtet worden.

Obwohl wir in diesem Kapitel im Prinzip nur ideale, unendlich ausgedehnte Wellenzüge der Form $u(x) = f + g \cos(kx)$ betrachten, wollen wir doch den Einfluss sehr weit entfernt („im Unendlichen“) liegender Randbedingungen in Rechnung stellen. Er macht sich in den numerischen Simulationen im roten Gebiet von Abbildung 5.1 insofern bemerkbar, als die sich einstellenden periodischen Muster an den Rändern immer auf Null abfallen. Das ist in Einklang mit der heuristisch gewonnenen Erkenntnis, dass sich die periodischen Lösungen in diesem Gebiet aus vielen solitären Einzellösungen zusammensetzen, auf die wir im nächsten Kapitel noch näher eingehen werden. Deswegen nimmt die Erhaltungsgröße H dort stets den Wert Null an. Da ferner die Beziehung

$$k \cdot \frac{\partial J_0}{\partial k} = E_0 \quad (7.33)$$

gilt, kann man das Variationsverfahren nun derart erweitern, dass man die Wellenzahl k als weiteren Variationsparameter behandelt und die zu $E_0 = 0$ äquivalente Gleichung

$$\frac{\partial J_0}{\partial k} = 0 \quad (7.34)$$

neben den beiden Bedingungen (7.25) zur Bestimmung von f , g und k verwendet. Es kommt also unterhalb der Schwelle sm_1 aufgrund der Randbedingungen zur *Selektion* von k . Sinngemäß gelten diese Argumente auch im blau unterlegten Gebiet von

Abbildung 5.1, nachdem man wie am Ende von Abschnitt 7.1 erläutert auf die Variable $w = u - \xi_3$ transformiert hat⁴.

Die Auswertung des erweiterten Variationsverfahrens muss nun numerisch erfolgen. Mit der zusätzlichen Bedingung $\Delta = 0$ erhält man schließlich eine verbesserte Näherung für die Geburtslinie lokalisierter Lösungen. Das Ergebnis ist in Abbildung 7.5 gezeigt, diesmal wieder in den ursprünglichen Parametern a und γ . In der Tat ist das Resultat so gut, dass es im Rahmen der Genauigkeit, mit der die numerischen Simulation durchführbar sind, praktisch als exakt anzusehen ist⁵.

⁴In der ursprünglichen Variablen u klingen die Lösungen dort im Unendlichen auf die homogene Lösung ξ_3 ab, und die Erhaltungsgröße stellt sich auf den Wert $H_0 = -\frac{1}{2}\gamma\xi_3^2 - \frac{1}{3}\beta\xi_3^3 - \frac{1}{4}\xi_3^4$ ein.

⁵In den zeitabhängigen Simulationen startet man mit einem Anfangsprofil, das möglichst nahe bei der erwarteten lokalisierten Lösung liegt (siehe nächstes Kapitel). Damit wird die Lage der berechneten Linie *loc* in einer Vielzahl von Simulationen zu beiden Seiten davon überprüft. Oberhalb bleibt das Anfangsprofil erhalten, unterhalb stellt sich der homogene Zustand ein.

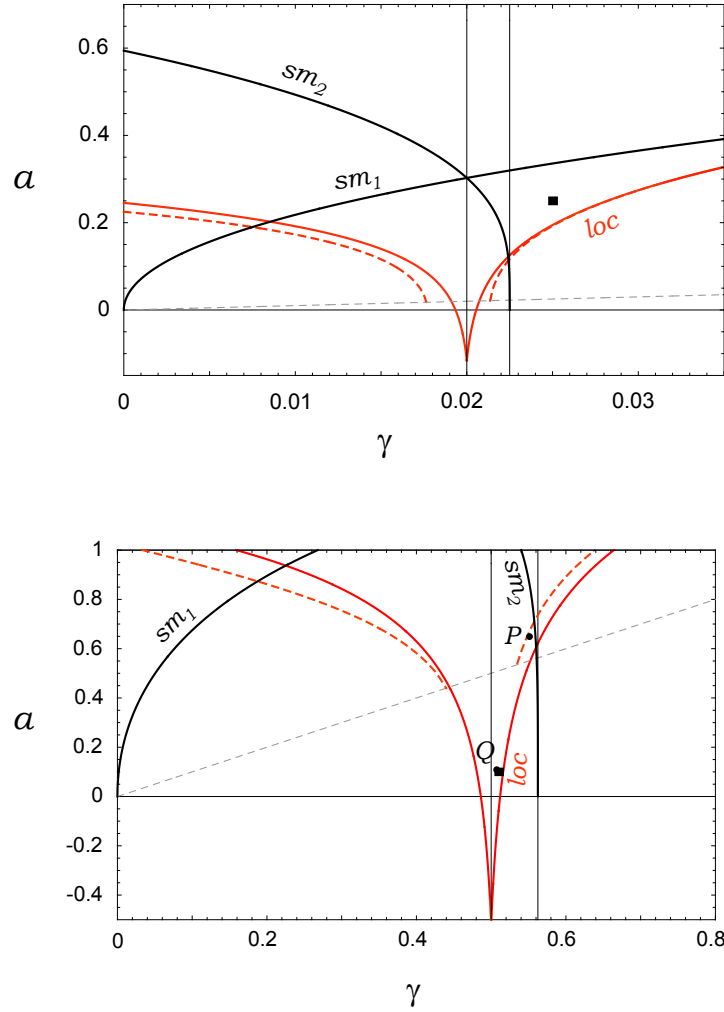


Abbildung 7.5: Lage der Bifurkationslinie loc in der (γ, a) -Ebene. Die im oberen Diagramm verwendeten Zahlenwerte $b = 1,3$ und $\beta = 0,3$ entsprechen denen aus Abbildung 5.1. Die gestrichelte rote Linie ergibt sich unter Verwendung der Näherung $k = k_c$, die nur für $a > \gamma$ sinnvoll ist. Die durchgezogene Linie entsteht, wenn man k als zusätzlichen Variationsparameter behandelt. Der Berührungspunkt S von sm_1 und loc ist hier der besseren Übersicht wegen nicht mehr eingezeichnet worden. Im unteren Diagramm wurden $b = 1,5$ und $\beta = 1,5$ gewählt. Bei diesen Parameterwerten existiert der Punkt S nicht mehr innerhalb des für das Modellsystem relevanten Gebietes, das durch die Forderung nach einer positiv definiten Diffusionsmatrix nach oben hin durch die Gerade $a = 1$ beschränkt ist. Damit gibt es in diesem Fall auch keine periodischen Lösungen mit „kleiner“ Amplitude. Die beiden Punkte P und Q wurden zur Durchführung weiterer numerischer Simulationen herausgegriffen. Die sich bei geeigneten Anfangsbedingungen einstellenden solitären Endzustände sind in Abbildung 8.2 (unten) wiedergegeben.

Kapitel 8

Eigenschaften der lokalisierten Lösungen

Im vorangegangenen Kapitel haben wir – ermutigt durch die Ergebnisse numerischer Simulationen – den Existenzbereich stationärer, periodischer Lösungen der einfachen Form $u(x) = f + g \cos(kx)$ in unserem grundlegenden System (3.2) berechnet. Insbesondere können solche Lösungen auch unterhalb der Schwelle sm_1 in einem Gebiet auftreten, das durch die Linie *loc* in Abbildung 5.1 begrenzt ist. Wie bereits geschildert, haben die elementaren Lösungen in diesem Bereich jedoch prinzipiell einen anderen, nämlich solitären Charakter. Die obigen periodischen Zustände ergeben sich dort im Wesentlichen durch die Aneinanderreihung vieler lokalisierter Einzelpeaks. In diesem letzten Kapitel wollen wir den Zusammenhang zwischen beiden Lösungstypen auflösen und die Form eines einzelnen solitären Pulses genauer analysieren. Durch die Kenntnis der Fourierkoeffizienten f und g sowie der Wellenzahl k in Abhängigkeit von den Systemparametern haben wir bereits eine erste theoretische Abschätzung für seine Amplitude und räumliche Ausdehnung. Nun wollen wir aber auch noch das Abklingverhalten berücksichtigen. Wir beschäftigen uns vorerst nur mit den solitären „Down“-Lösungen, die man bei den numerischen Simulationen im rot unterlegten Gebiet von Abbildung 5.1 findet. Im Anschluss an die Rechnungen gehen wir noch kurz auf den anderen Lösungstyp, die „Up“-Lösungen ein, die man links von der Symmetrielinie $\gamma = 2\beta^2/9$ im blauen Gebiet antrifft.

8.1 Lösungsansatz

Wir wählen folgenden Ansatz für eine lokalisierte Elementarlösung (ein einzelner Peak), die um $x = 0$ zentriert sei:

$$u(x) = \begin{cases} u_i(x) = f + g \cos(kx) & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{k} \\ u_a(x) = h \cos(kx + \varphi) e^{-\kappa x} & x > \frac{\pi}{k} \end{cases} \quad (8.1)$$

Für $x < 0$ gelten dann symmetrische Formeln: $u(-x) = u(x)$. Die Wellenzahl k und die Dämpfungskonstante κ im Außenbereich bestimmen wir aus der Dispersionsrelation $\Delta^2 + (k_c^2 - (k + i\kappa)^2)^2 = 0$ der linearisierten Gleichung (4.3):

$$k = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{k_c^4 + \Delta^2} + k_c^2} \quad \kappa = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{k_c^4 + \Delta^2} - k_c^2} \quad . \quad (8.2)$$

Man beachte, dass im betrachteten Parameterbereich gemäß (3.34) die Definition $\Gamma = i\Delta$ mit reellem Δ gilt. Damit ist der Ansatz (8.1) asymptotisch (für große x) exakt. Außerdem ist er offensichtlich auf „Multi-Peak-Lösungen“ mit mehreren Schwingungsperioden im Innenbereich verallgemeinerbar. Die Anschlussbedingungen für die Funktionen u_i und u_a sowie ihre erste Ableitung

$$u_i\left(\frac{\pi}{k}\right) = u_a\left(\frac{\pi}{k}\right) \quad u_i'\left(\frac{\pi}{k}\right) = u_a'\left(\frac{\pi}{k}\right) \quad (8.3)$$

legen den Phasenwinkel φ und die Amplitude h wie folgt fest:

$$\varphi = -\pi - \arctan\left(\frac{\kappa}{k}\right) \quad h = (f - g) \sqrt{1 + \left(\frac{\kappa}{k}\right)^2} \exp\left(\frac{\pi\kappa}{k}\right) \quad . \quad (8.4)$$

Wie im vorigen Kapitel bestimmen wir die zugehörige Funktion $v(x)$ durch Integration der inhomogenen Differentialgleichung (7.18). Im Innenraum $0 \leq x \leq \frac{\pi}{k}$ gilt wieder

$$v_i(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + \frac{g k^2}{1 + k^2} \cos(kx) \quad . \quad (8.5)$$

Diesmal dürfen wir die Integrationskonstanten nicht zu Null setzen. Offenbar ist aber aus Symmetriegründen die Wahl

$$C_1 = C_2 =: F \quad (8.6)$$

zwingend, sofern wir zusätzlich die Stetigkeit von $v'(x)$ an der Stelle $x = 0$ fordern. Damit können wir auch schreiben:

$$v_i(x) = \frac{g k^2}{1 + k^2} \cos(kx) + 2F \cosh x \quad . \quad (8.7)$$

Im Außenraum $x > \frac{\pi}{k}$ überprüft man durch Einsetzen in (7.18) die Gültigkeit der Formel

$$v_a(x) = (A \cos(kx + \varphi) + B \sin(kx + \varphi)) e^{-\kappa x} + G e^{-x} \quad (8.8)$$

mit

$$A = \frac{h (k^4 + k^2 + 2 k^2 \kappa^2 - \kappa^2 + \kappa^4)}{N(k, \kappa)} \quad (8.9a)$$

$$B = -\frac{2 h k \kappa}{N(k, \kappa)} \quad (8.9b)$$

und der Definition

$$N(k, \kappa) = k^4 + 2 k^2 (1 + \kappa^2) + (1 - \kappa^2)^2 \quad . \quad (8.10)$$

Mit (8.2), (3.19) und (3.34) vereinfachen sich diese Ausdrücke wie folgt:

$$A = \frac{h(a + \gamma)}{2b} \quad B = -\frac{h \Delta(b - a)}{b} \quad N = \frac{b}{b - a} \quad . \quad (8.11)$$

Die Größe G in (8.8) stellt eine Integrationskonstante dar. Ein weiterer Anteil He^x zur allgemeinen homogenen Lösung muss verworfen werden, um das Abklingen für $x \rightarrow \infty$ zu garantieren. Aus den zu (8.3) analogen Anschlussbedingungen

$$v_i(\frac{\pi}{k}) = v_a(\frac{\pi}{k}) \quad v'_i(\frac{\pi}{k}) = v'_a(\frac{\pi}{k}) \quad (8.12)$$

folgt nach Einsetzen von (8.4) und (8.9):

$$F = \frac{f(1 + k^2)(k^2 + \kappa^2) + g\kappa(2k^2 - \kappa)}{2(1 + k^2)(k^2 + (1 + \kappa)^2)} \exp\left(-\frac{\pi}{k}\right) \quad (8.13a)$$

$$G = \left(2F \cosh\left(\frac{\pi}{k}\right) - \frac{gk^2}{1 + k^2} - (f - g) \frac{(1 + k^2 + \kappa^2)(k^2 + \kappa^2)}{N(k, \kappa)}\right) \exp\left(\frac{\pi}{k}\right) \quad . \quad (8.13b)$$

Man berechnet nun im Innenbereich mit (8.7):

$$\int_{-\pi/k}^{\pi/k} v_i(x) dx = 4F \sinh\left(\frac{\pi}{k}\right) \quad . \quad (8.14)$$

Im Außenbereich findet man hingegen mit (8.8), nachdem man (8.4) und (8.9) eingesetzt hat:

$$\int_{\pi/k}^{\infty} v_a(x) dx = 2(f - g) \frac{\kappa(k^2 + \kappa^2)}{N(k, \kappa)} + G \exp\left(-\frac{\pi}{k}\right) = -2F \sinh\left(\frac{\pi}{k}\right) \quad . \quad (8.15)$$

Damit erfüllt unser Näherungsansatz die Bedingung

$$\int_{-\infty}^{\infty} v(x) dx = \int_{-\pi/k}^{\pi/k} v_i(x) dx + 2 \int_{\pi/k}^{\infty} v_a(x) dx = 0 \quad , \quad (8.16)$$

der auch die exakten lokalisierten Lösungen unterliegen, wie man durch einmalige bestimmte Integration von (7.18) sieht. Für das Integral über die Funktion $u(x)$ ergibt sich auf ähnliche Weise:

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(x) dx = \frac{2\pi f}{k} + \frac{4(f - g)\kappa}{k^2 + \kappa^2} \quad . \quad (8.17)$$

Dieser Wert kann, nachdem wir f und g bestimmt haben, mit dem numerischen Wert verglichen werden und liefert eine exzellente Übereinstimmung.

8.2 Minimierung des Funktionals J

Wir stellen fest, dass wie im vorigen Kapitel die beiden unbestimmten Parameter f und g in unserem Ansatz (8.1) verblieben sind. Alle anderen wurden durch Anschluss- und Randbedingungen festgelegt. Wiederum bestimmen wir ihren optimalen Wert durch Minimierung des Wirkungsfunktionals $J = \int L(x) dx$ mit $L = T - U$ gemäß (4.19). Das Integral über den inneren Bereich lässt sich in zwei Beiträge J_0 und J_1 aufspalten, wobei J_0 mit (7.23) identisch ist und J_1 den homogenen Lösungsanteil $2F \cosh x$ in (8.7) berücksichtigt. Ähnlich kann man das Integral über den äußeren Bereich in einen von der Integrationskonstanten G unabhängigen Beitrag J_2 und einen dazu proportionalen Term J_3 zerlegen. Insgesamt ergibt sich also nach einiger Rechnung:

$$J = J_0 + \Delta J \quad \text{mit} \quad \Delta J = J_1 + J_2 + J_3 \quad (8.18)$$

und

$$J_1 = -2bF^2 \sinh\left(\frac{2\pi}{k}\right) \quad (8.19a)$$

$$J_2 = C_1(f - g)^2 + C_2(f - g)^3 + C_3(f - g)^4 \quad (8.19b)$$

$$J_3 = -bG \exp\left(-\frac{2\pi}{k}\right) \left(G + 4(f - g) \frac{\kappa(k^2 + \kappa^2)}{N(k, \kappa)} \exp\left(\frac{\pi}{k}\right) \right) . \quad (8.19c)$$

Hierbei wurden folgende Definitionen eingeführt:

$$C_1 = \frac{1}{4\kappa} \left(bH(k, \kappa) - a(k^2 + \kappa^2) + \gamma \cdot \frac{k^2 + 5\kappa^2}{k^2 + \kappa^2} \right) \quad (8.20a)$$

$$C_2 = \frac{4}{9} \beta \kappa \left(\frac{1}{k^2 + \kappa^2} + \frac{4}{k^2 + 9\kappa^2} \right) \quad (8.20b)$$

$$C_3 = \frac{1}{64\kappa} \left(3 + \kappa^2 \left(\frac{16}{k^2 + \kappa^2} + \frac{27}{k^2 + 4\kappa^2} \right) \right) \quad (8.20c)$$

sowie

$$H(k, \kappa) = \left(\frac{k^2 + \kappa^2}{N(k, \kappa)} \right)^2 (1 + k^2 + \kappa^2) \left((1 + k^2)^2 - 2(5 - k^2)\kappa^2 + \kappa^4 \right) . \quad (8.21)$$

Trotz dieser etwas unhandlichen Ausdrücke besitzt das Funktional J im Rahmen unserer Näherung eine einfache Struktur. Es lässt sich nämlich leicht auf die Form

$$J = \sum_{i+j=0,1,\dots,4} C_{ij} f^i g^j \quad (8.22)$$

mit nur von den Systemparametern abhängigen, bekannten Koeffizienten C_{ij} bringen. Die Minimierung kann dann auf einfache Weise numerisch durchgeführt werden.

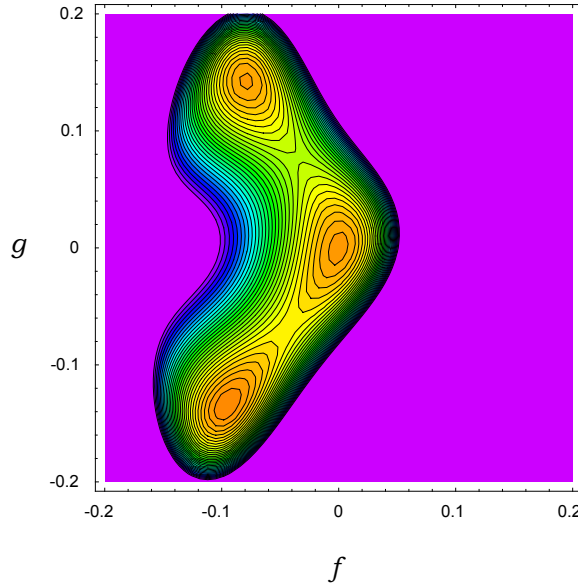


Abbildung 8.1: Höhenlinien des Funktional $J = J_0 + \Delta J$ in Abhängigkeit von den beiden Variationsparametern f und g , berechnet im Punkt E aus Abbildung 5.1. Gegenüber der Abbildung 7.4 bewirken die Beiträge von ΔJ nur eine leichte Verzerrung. Das Minimum bei positivem g muss ausgeschlossen werden.

Abbildung 8.1 bestätigt, was man bereits anschaulich erwarten konnte: Der Beitrag von ΔJ ist im Verhältnis zu J_0 eher klein und führt nur zu einer geringfügigen, aber erkennbaren Korrektur der Werte von f und g , verglichen mit dem rein harmonischen Ansatz aus Kapitel 7. Abbildung 8.2 zeigt, wie gut das Resultat mit dem Befund aus den numerischen Simulationen übereinstimmt. In Bezug auf die Geburtslinie *loc* der lokalisierten Lösungen (= Sattel-Knoten Linie der Entstehung eines von Null verschiedenen lokalen Minimums im Funktional J) muss noch erwähnt werden, dass der obige Ansatz bei der numerischen Auswertung zwar wesentlich mehr Rechenzeit benötigt, jedoch keinen sichtbaren Unterschied zur durchgezogenen Linie in Abbildung 7.5 bewirkt, welche unter Verwendung von J_0 alleine (und mit der Wellenzahl k als zusätzlichem Variationsparameter) berechnet wurde.

Natürlich lassen sich rein numerisch auch andere Testfunktionen durch Minimierung von J an den tatsächlichen Lösungsverlauf anfitzen. Der hier vorgestellte Ansatz (8.1) erscheint aber aus zwei Gründen besonders attraktiv: Zum einen lässt er eine fast vollständig analytische Behandlung zu, insbesondere wenn man in einer ersten Näherung für f und g die Werte aus Kapitel 7 verwendet, die sich dort aus einer kubischen Gleichung ergaben. Zum anderen beruht er konsequent auf einer sehr anschaulichen Interpretation der Struktur der lokalisierten Lösungen und ihrer Verbindung mit den (annähernd harmonischen) periodischen Lösungen.

All das bisher in diesem Kapitel Gesagte gilt für die solitären „Down“-Lösungen, die

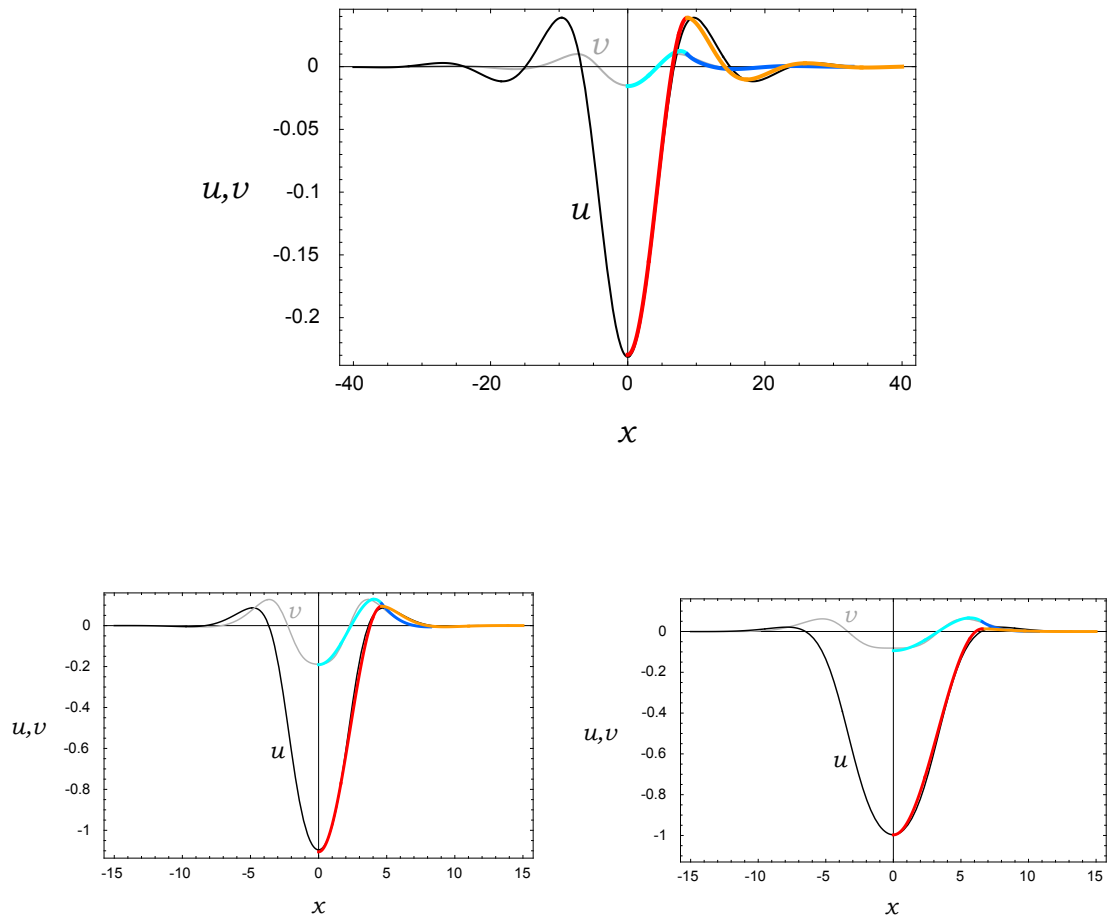


Abbildung 8.2: Vergleich der lokalisierten Näherungslösung (farbig) mit dem Ergebnis der numerischen Simulation (grau/schwarz). Das obere Diagramm gilt im Punkt E aus Abbildung 5.1. Die beiden unteren Diagramme sind in den Punkten P (links) bzw. Q (rechts) von Abbildung 7.5, unten erzeugt worden. Man beachte die unterschiedlichen Maßstäbe der Achsen sowie die verschieden starke Dämpfung der Pulse.

man bei den numerischen Simulationen im roten Gebiet von Abbildung 5.1 vorfindet. Zu Behandlung der „Up“-Lösungen, die sich im blauen Gebiet einstellen, geht man am besten wie am Ende von Abschnitt 7.1 beschrieben von den Gleichungen (B.3) aus. Der Lösungsansatz und das zu minimierende Funktional haben in den dort benutzten Variablen die gleiche Form wie in der obigen Rechnung. Man muss lediglich eine Substitution der Parameter $\beta \rightarrow \hat{\beta}$ und $\gamma \rightarrow \hat{\gamma}$ gemäß (B.4) durchführen, um die Resultate zu übertragen.

Beim Überschreiten der Symmetrielinie $\gamma = 2\beta^2/9$ wird in den Simulationen jeweils der eine Lösungstyp durch den anderen abgelöst. Das zugrunde liegende Prinzip besteht offenbar darin, dass in der zeitlichen Dynamik sich der Typ durchsetzt, der im Unendlichen auf die stabilere (sprich weiter von der Instabilitätsschwelle entfernten) der beiden zunächst noch vorhandenen homogenen Lösungen abklingt¹. Ein ganz ähnliches Verhalten beobachtet man auch bei den Frontenlösungen: Sie bewegen sich immer in der Weise fort, dass das System im Verlauf der Zeit auf die stabilere homogene Lösung „angehoben“ oder „abgesenkt“ wird. Im Gegensatz zu den Fronten können die solitären Lösungen aber auch dort existieren, wo nur noch *eine* homogene Lösung vorliegt, nämlich im rot unterlegten Gebiet rechts von der Sattel-Knoten Linie $\gamma = \beta^2/4$ bis hin zu Punkt S bei $\gamma = 4\beta^2/3$.

Zusammenfassend stellen wir fest, dass die Linie *loc* im Bifurkationsdiagramm (Abbildung 5.1), dessen Grundstruktur durch die beiden kombinierten Sattel-Knoten/Soft-Mode Bifurkationen bestimmt wird, von ebenso fundamentaler Bedeutung ist, wie die Linien sm_1 und sm_2 . An *loc* werden solitäre Lösungen mit endlicher Amplitude geboren, die sich je nach verwendeten Anfangsbedingungen im Verlauf der zeitlichen Dynamik zu irregulären oder regulären Mustern kombinieren lassen. An den Soft-Mode Linien sm_1 bzw. sm_2 erfolgt dann unabhängig von den Anfangsbedingungen die „Kristallisation“ des periodischen Gitters.

¹Die dritte homogene Lösung ist immer instabil und spielt keine Rolle.

Kapitel 9

Zusammenfassung

In dieser Arbeit wurde die raum-zeitliche Strukturbildung in der Umgebung der kombinierten Sattel-Knoten/Soft-Mode Bifurkation untersucht. Dieses Szenario kommt dadurch zustande, dass die homogene Fixpunktlösung eines räumlich ausgedehnten, inversionssymmetrischen Systems einerseits eine Instabilität gegenüber inhomogenen Störungen aufweist (eine sogenannte Soft-Mode Instabilität), andererseits selbst bei einem bestimmten Parameterwert durch eine Sattel-Knoten Bifurkation vernichtet wird.

In Kapitel 2 wurden die Bedingungen, die zur Verschmelzung der beiden elementaren Bifurkationen in einer allgemeinen $(1 + 1)$ -dimensionalen partiellen Differentialgleichung führen, aufgestellt und auf eine geometrische Weise interpretiert. Ein zentrales Resultat besteht in der Aussage, dass die beiden beteiligten Bifurkationsflächen sich entlang der gesamten Schnittlinie im Parameterraum berühren, sprich tangential ineinander münden. Das lineare Eigenwertspektrum besitzt dort einen quartischen Verlauf bei verschwindender kritischer Wellenzahl. Die kombinierte Bifurkation ist von der Kodimension Zwei. Es sind also mindestens zwei unabhängige Parameter notwendig, um sie zu generieren.

Im Anschluss an die allgemeinen stabilitätstheoretischen Untersuchungen wurde zunächst eine Normalform vorgeschlagen, welche die entartete Bifurkation in einer möglichst einfachen Weise repräsentiert. Der räumlich homogene Anteil dieses zweikomponentigen Systems von Differentialgleichungen besteht aus der bekannten Normalform der Sattel-Knoten Bifurkation. Die Ortsabhängigkeit wird über die Ankopplung einer nichtdiagonalen Diffusionsmatrix in die Gleichungen eingeführt.

Zu Beginn von Kapitel 3 wurde festgestellt, dass die Beschränkung auf die in der Sattel-Knoten-Normalform enthaltene quadratische Nichtlinearität das System im Hinblick auf die zeitliche Dynamik zu weit reduziert. Daher wurden alle Diskussionen im weiteren Verlauf der Arbeit unter Berücksichtigung einer zusätzlichen kubischen Nichtlinearität durchgeführt. Es treten nun zwei der oben charakterisier-

ten Entartungspunkte auf, die durch eine globale Symmetrie verknüpft sind. Nach der ausführlichen Besprechung der homogenen Lösungen und ihrer Stabilität wurde eine Koordinatentransformation vorgestellt, die das Ausgangssystem im stationären Fall auf die Form zweier nichtlinear gekoppelter harmonischer Oszillatoren bringt. Durch die Kombination der beiden Differentialgleichungen zweiter Ordnung ergab sich ferner eine Gleichung vierter Ordnung vom verallgemeinerten Swift-Hohenberg Typ, deren Gestalt allerdings deutlich komplizierter ist als in den Beispielen, die uns bekannt sind.

Kapitel 4 war der detaillierten Untersuchung der stationären Gleichungen gewidmet. Es wurde festgestellt, dass sie von kanonischer Struktur sind. Die zugehörige Hamiltonfunktion besitzt die Eigentümlichkeit, dass die Gesamtenergie der ungekoppelten Oszillatoren nicht wie üblich aus der Summe der Einzelenergien besteht, sondern aus deren Differenz. Der Begriff „Energie“ wird hier ohnehin nur aufgrund der formalen Ähnlichkeit zu einem System mechanischer Oszillatoren verwendet. In Wirklichkeit stellt die Hamiltonfunktion im vorliegenden Fall eine räumliche Erhaltungsgröße dar. Schließlich wurden noch die zugeordnete Lagrange-Funktion und das Wirkungsfunktional angegeben, aus denen sich die zeitunabhängigen Grundgleichungen auch ableiten lassen. Für die vollen, zeitabhängigen Bewegungsgleichungen existiert aufgrund ihres dissipativen Charakters keine Lagrange-Dichte.

In Kapitel 5 wurden die Ergebnisse numerischer Simulationen des Modellsystems vorgestellt. Erwartungsgemäß findet man in hinreichender Entfernung vom Entartungspunkt der kombinierten Sattel-Knoten/Soft-Mode Bifurkation das klassische Verhalten: An der Instabilitätsschwelle der homogenen Lösung entstehen räumlich periodische Lösungen, deren Wellenlänge durch die kritische Wellenzahl im Eigenwertspektrum des linearen Operators festgelegt ist. Ihre Amplitude skaliert mit dem Abstand zur Schwelle. Nähert man sich dem Verschmelzungspunkt, so ändert sich das Verhalten des Systems jedoch grundlegend: Unterhalb der Soft-Mode Linie existieren nun in einem gewissen Parameterbereich stabile solitäre Lösungen. Diese im Außenbereich schnell abklingenden Pulse sind stationär, wandern also nicht. Sie stellen eine elementare Anregung des nichtlinearen Systems dar und lassen sich zu komplizierteren Mustern zusammenfügen. Im Grenzfall der dichtesten Packung vieler solitärer Einzellösungen entsteht ein annähernd sinusförmiges Gitter. Die sich in den zeitabhängigen Simulationen tatsächlich einstellende Anordnung kann regulär oder irregulär sein, je nach verwendetem Anfangsprofil. Oberhalb der Soft-Mode Linie sind einzelne solitäre Lösungen nicht mehr stabil. Stattdessen kommt es bereits bei geringfügigem Überschreiten der Bifurkationslinie unabhängig von den Anfangsbedingungen zur „Kristallisation“ eines periodischen Zustandes endlicher Amplitude. Er geht stetig aus der zuvor beschriebenen dichtesten Anordnung unterhalb der Schwelle hervor.

Von besonderem Interesse ist das Übergangsgebiet, in dem sich das Verhalten des Systems im Keim zu verändern beginnt. Um es aufzuspüren wurden im Kapitel 6 im Rahmen einer störungstheoretischen Formulierung stationäre, periodische Lösungen

kleiner Amplitude ermittelt und anschließend einer Stabilitätsanalyse unterzogen. Die Berechnung selbst beruht auf der Mittelwertmethode, welche auf die Oszillatorgleichungen angewendet wird. Da die erste Ordnung der kanonischen Störungstheorie verschwindet, ist es notwendig, das Averaging bis in die zweite Ordnung fortzuführen. Außerdem muss anschließend eine Regularisierung der Lösungen vorgenommen werden, um die durch die Verwendung von Winkel- und Wirkungsvariablen hervorgerufenen Singularitäten zu beseitigen. Die Stabilitätsanalyse der periodischen Lösungen, die auf ein Bloch-Problem führt, liefert dann eine analytische Bedingung für den Umschlagpunkt auf der Soft-Mode Linie.

In der Nähe der Schwelle ist ferner eine reduzierte Beschreibung der Systemdynamik durch eine Ginzburg-Landau Gleichung mit reellen Koeffizienten möglich, sofern das Vorzeichen der kubischen Nichtlinearität $|A|^2 A$ sättigenden Charakter besitzt. Durch die explizite Berechnung des zu diesem Term gehörigen Koeffizienten als Funktion der ursprünglichen Systemparameter ergibt sich, dass genau am obigen Umschlagpunkt ein Vorzeichenwechsel auftritt, der dem Übergang von super- zu subkritischen Verhalten entspricht.

Mit der harmonischen Balance wurde in Kapitel 7 ein einfaches nicht-perturbatives Näherungsverfahren angewandt, das einen globalen Überblick über die stationären periodischen Lösungen unseres Systems gestattet. Es beinhaltet insbesondere auch das Verhalten im Übergangsgebiet. Man wird auf eine kubische Gleichung geführt, bei deren Diskussion man feststellt, dass die periodischen Lösungen unterhalb des subkritischen Abschnitts der Soft-Mode Linie an einer gewissen Bifurkationslinie *loc* mit endlicher Amplitude geboren werden. Die beiden Linien münden am obigen Punkt, an dem der kubische Koeffizient der zugehörigen Amplitudengleichung einen Nulldurchgang hat, ineinander ein. Aufgrund der bereits beschriebenen heuristischen Erkenntnis, dass periodische Lösungen im Zwischenbereich durch die Aneinanderreihung einzelner solitärer Peaks zustande kommen, schließt man, dass es sich bei *loc* um die Geburtslinie lokalisierter Lösungen handelt. Dies wird durch die Simulationen bestätigt: Unterhalb der berechneten Linie treten nur noch homogene Lösungen auf. Im zweiten Teil von Kapitel 7 wurde gezeigt, dass sich die selben Resultate auch aus einem Variationsprinzip ableiten lassen. Dazu wird der Wert des Wirkungsfunktional durch eine periodische Testfunktion mit unbekannten Fourierkoeffizienten als Variationsparametern minimiert. Die Linie *loc* beschreibt dann die Entstehung eines von Null verschiedenen lokalen Minimums durch eine Sattel-Knoten Bifurkation.

Im Kapitel 8 haben wir das Variationsverfahren erweitert, um die Gestalt einer einzelnen solitären Lösung zu erfassen. Die Phänomenologie der numerischen Lösungen legt einen Ansatz nahe, der aus einer rein harmonischen Schwingungsperiode im Innenbereich besteht. Das Abklingverhalten im Außenbereich wird durch die Linearisierung der stationären Gleichungen um die homogene Lösung bestimmt. Die Berechnung des Wirkungsfunktional liefert nun ein Polynom vierter Ordnung in den beiden verbleibenden Variationsparametern, das leicht numerisch minimiert werden kann. Es zeigt sich, dass die so konstruierten Näherungslösungen die Gestalt der

numerischen Lösungen bei verschiedensten Werten der Systemparameter hervorragend approximieren. Amplitude und konstantes Glied der Schwingungsperiode im Innenraum weichen nur sehr wenig von den entsprechenden Fourierkoeffizienten im Fall unendlich langer Wellenzüge ab, was die Interpretation der periodischen Strukturen unterhalb der Soft-Mode Linie als solitäre Multi-Peak Lösungen noch einmal untermauert.

Die Kombination zweier elementarer, wohl etablierter Bifurkationstypen hat in dieser Arbeit interessante und unerwartete Konsequenzen für die raum-zeitliche Strukturbildung nach sich gezogen. Die gemachten Voraussetzungen sind von so allgemeiner Natur, dass man erwarten kann, sie in vielen partiellen Differentialgleichungen zur Beschreibung konkreter physikalischer Phänomene anzutreffen. Über ein Beispiel aus dem Bereich des Festkörpermagnetismus, das für uns den Anstoß zu den hier präsentierten Untersuchungen darstellte, wurde bereits in der Einleitung berichtet.

Zeitabhängige Lösungen haben wir nicht behandelt. Sie stellen ein mögliches Betätigungsfeld für Folgearbeiten dar. Auch die Erweiterung auf mehrere Raumdimensionen ist (wie bei den meisten Modellgleichungen dieser Art) weit mehr als eine rein technische Herausforderung. Schließlich könnte man analog zu der hier vorgestellten Behandlungsweise die Verschmelzung von Sattel-Knoten und Hopf-Bifurkation untersuchen. Dieses Szenario ist in räumlich homogenen Systemen auch als Arnold-Takens-Bogdanov Bifurkation bekannt und zieht dort das Auftreten einer globalen Bifurkation nach sich. Es wäre interessant, die Konsequenzen für die Strukturbildung in räumlich ausgedehnten Systemen zu studieren. Damit bleibt im Umfeld der hier vorliegenden Arbeit bestimmt noch Raum für viele spannende Fragestellungen und Ergebnisse.

Anhang A

Koordinatentransformation

Gegeben sei die kubische Gleichung $G(U) = 0$ mit dem Polynom (3.1). Wir bezeichnen ihre (reellen oder komplexen) Lösungen mit λ_1 bis λ_3 . Wie in Abbildung 3.1 sei ferner $\lambda_1 > 0$ die für alle Parameter $\mu > 0$ reelle Lösung und u die Abweichung davon:

$$U = \lambda_1 + u \quad . \quad (\text{A.1})$$

Wegen $G(\lambda_1) = 0$ ist dann

$$\begin{aligned} G(U) &= \mu - U^2 - U^3 \\ &= -(2\lambda_1 + 3\lambda_1^2)u - (1 + 3\lambda_1)u^2 - u^3 \quad . \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Andererseits gilt bei Linearfaktorzerlegung der Zusammenhang

$$\begin{aligned} G(U) &= -(U - \lambda_1)(U - \lambda_2)(U - \lambda_3) \\ &= -(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)u - (2\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3)u^2 - u^3 \quad . \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Zusammenfassend kann man also schreiben:

$$G(U(u)) = -\gamma u - \beta u^2 - u^3 \quad (\text{A.4})$$

mit den Definitionen

$$\beta = -\frac{1}{2} G''(\lambda_1) = 2\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 \quad (\text{A.5})$$

$$\gamma = -G'(\lambda_1) = (\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3) \quad . \quad (\text{A.6})$$

Beide Größen sind unter den gemachten Voraussetzungen reell und positiv. Ihre Abhängigkeit voneinander lässt sich auch durch die Beziehung

$$\beta^2 = 3\gamma + 1 \quad (\text{A.7})$$

ausdrücken.

Anhang B

Symmetrierelationen

Analog zur Vorgehensweise in Anhang A notieren wir das Polynom (3.3) in Linearfaktorzerlegung

$$H(u) = (u - \xi_1)(u - \xi_2)(u - \xi_3) \quad (\text{B.1})$$

mit den in (3.4) angegebenen Nullstellen ξ_1 bis ξ_3 . Wählt man vermöge

$$u = \xi_3 + w \quad (\text{B.2})$$

die Lösung ξ_3 als Referenzzustand, so werden die Bewegungsgleichungen (3.2) in das formgleiche System

$$w_t = -\hat{\gamma} w - \hat{\beta} w^2 - w^3 - a w_{xx} + b v_{xx} \quad (\text{B.3a})$$

$$v_t = -v - w_{xx} + v_{xx} \quad (\text{B.3b})$$

überführt, wobei die Koeffizienten nun jedoch durch

$$\hat{\beta} = \frac{1}{2} H''(\xi_3) = (2\xi_3 - \xi_2) = -\frac{1}{2} \left(\beta + 3\sqrt{\beta^2 - 4\gamma} \right) \quad (\text{B.4})$$

$$\hat{\gamma} = H'(\xi_3) = \xi_3 (\xi_3 - \xi_2) = \frac{1}{2} \left(\beta^2 - 4\gamma + \beta\sqrt{\beta^2 - 4\gamma} \right) \quad (\text{B.5})$$

gegeben sind¹. Daher lässt sich das Ergebnis (3.16) für die Instabilitätsschwelle der Lösung ξ_1 auch auf den Zweig ξ_3 übertragen. Es gilt also die Parameterdarstellung

$$a(k) = b k^2 \frac{2 + k^2}{(1 + k^2)^2} \quad (\text{B.6})$$

$$\hat{\gamma}(k) = \frac{b k^4}{(1 + k^2)^2} \quad , \quad (\text{B.7})$$

¹Geometrisch gesehen sind diese Relationen durch die Punktsymmetrie des Polynoms $H(u)$ bezüglich des Wendepunktes $u_0 = -\beta/3$ bedingt. Dem entspricht die Gerade $\gamma = 2\beta^2/9$ in Abbildung 3.3.

wobei der Kurvenparameter k wiederum die Bedeutung der kritischen Wellenzahl hat. Auflösen der Beziehung (B.5) nach γ liefert:

$$\gamma(k) = \frac{1}{8} \left(\beta^2 - 4 \hat{\gamma}(k) + \beta \sqrt{\beta^2 + 8 \hat{\gamma}(k)} \right) \quad . \quad (\text{B.8})$$

Setzt man noch $\hat{\gamma}(k)$ aus (B.7) ein, so erhält man eine Darstellung der Instabilitätslinie sm_2 in den ursprünglichen Parametern $a(k)$ und $\gamma(k)$. Elimination von k ergibt schließlich die explizite Gleichungsform

$$a(\gamma) = -\frac{1}{2} (\sigma^2(\gamma) - 2\sqrt{2b} \sigma(\gamma)) \quad (\text{B.9})$$

mit den Abkürzungen

$$\sigma(\gamma) = \sqrt{\rho^2(\gamma) + \beta \rho(\gamma)} \quad \text{und} \quad \rho(\gamma) = \sqrt{\beta^2 - 4\gamma} \quad . \quad (\text{B.10})$$

Anhang C

Eigenwerte des linearen Operators

Die Matrix (3.7) besitzt die beiden Eigenwerte

$$\lambda^{(\pm)}(k) = \frac{1}{2}(-p(k) \pm \sqrt{\Delta(k)}) \quad , \quad (\text{C.1})$$

wobei die Abkürzung

$$\Delta(k) = p^2(k) - 4q(k) \quad (\text{C.2})$$

und die Definitionen (3.9) sowie (3.10) eingeführt wurden. Ordnet man nach Potenzen von k , so lässt sich die Diskriminante als

$$\Delta(k) = F^2 + Gk^2 + Hk^4 \quad (\text{C.3})$$

mit

$$\begin{aligned} F &= 1 - \gamma \\ G &= 2(1+a)(1-\gamma) \\ H &= (1+a)^2 - 4b \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

darstellen. Für Wellenzahlen $|k| \ll 1$ und $F > 0$ gilt mit $(1+x)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \dots$ die Entwicklung

$$\sqrt{\Delta(k)} = F + \frac{G}{2F}k^2 + \left(\frac{H}{2F} - \frac{G^2}{8F^3}\right)k^4 + \mathcal{O}(k^6) \quad . \quad (\text{C.5})$$

Damit folgt für den kritischen Zweig des Spektrums:

$$\lambda^{(+)}(k) = -\gamma + ak^2 - \frac{bk^4}{1-\gamma} + \mathcal{O}(k^6) \quad . \quad (\text{C.6})$$

Anhang D

Nützliche Identitäten

Aus den Definitionen (3.18) und (3.19) folgen einige Identitäten, die wir im Verlauf der Rechnungen immer wieder benötigen. Neben den elementaren Beziehungen

$$\omega_1^2 - \omega_2^2 = 2\Gamma \quad \omega_1^2 + \omega_2^2 = 2k_c^2 \quad \omega_1^2 \omega_2^2 = \frac{\gamma}{b-a} \quad (\text{D.1})$$

sind dies vor allem die Relationen

$$\Gamma^2 = (1 + k_c^2)^2 - \frac{b}{b-a} = k_c^4 - \frac{\gamma}{b-a} \quad (\text{D.2})$$

und

$$\Gamma^2 - k_c^2 - k_c^4 = -\frac{a + \gamma}{2(b-a)} \quad (\text{D.3})$$

oder auch

$$(1 + k_c^2)(\gamma - a k_c^2) + b k_c^4 = -\Gamma^2(b-a) \quad . \quad (\text{D.4})$$

Mit den Bezeichnungen (3.21) hat man weiterhin:

$$\gamma(v_i - 1) - v_i(b v_i - a) = 0 \quad (i = 1, 2) \quad . \quad (\text{D.5})$$

Neben den Beziehungen

$$\frac{\gamma(v_2 - 1) - v_1(b v_2 - a)}{(b-a)(v_1 - v_2)} = \omega_1^2 \quad (\text{D.6a})$$

$$-\frac{\gamma(v_1 - 1) - v_2(b v_1 - a)}{(b-a)(v_1 - v_2)} = \omega_2^2 \quad , \quad (\text{D.6b})$$

die symmetrisch gegenüber der Vertauschung der Indizes ($1 \leftrightarrow 2$) sind, gibt es auch einige, die sich antisymmetrisch verhalten:

$$\frac{v_2 - 1}{v_1 - v_2} = -\frac{1 + \omega_1^2}{2\Gamma} \quad (\text{D.7a})$$

$$\frac{v_1 - 1}{v_1 - v_2} = -\frac{1 + \omega_2^2}{2\Gamma} \quad (\text{D.7b})$$

und

$$\frac{(1 - a v_2) - v_2 (1 - b v_2)}{v_1 - v_2} = \frac{1 + \omega_1^2}{2\Gamma} (1 - \gamma) \quad (\text{D.8a})$$

$$\frac{(1 - a v_1) - v_1 (1 - b v_1)}{v_1 - v_2} = \frac{1 + \omega_2^2}{2\Gamma} (1 - \gamma) \quad , \quad (\text{D.8b})$$

sowie schließlich mit den Abkürzungen (3.25)

$$\frac{(1 - a v_1) - v_2 (1 - b v_1)}{v_1 - v_2} = \frac{1 + \omega_1^2}{2\Gamma} \cdot r_1 \quad (\text{D.9a})$$

$$\frac{(1 - a v_2) - v_1 (1 - b v_2)}{v_1 - v_2} = \frac{1 + \omega_2^2}{2\Gamma} \cdot r_2 \quad . \quad (\text{D.9b})$$

Mit den Definitionen (3.27) gilt ferner:

$$\Gamma^2 p - k_c^2 q = -\frac{a + \gamma}{2(b - a)} (1 - \gamma) \quad . \quad (\text{D.10})$$

Außerdem:

$$k_c^2 - \frac{p}{b - a} = \frac{a - 1}{b - a} \quad . \quad (\text{D.11})$$

Weitere nützliche Identitäten sind:

$$\frac{b \omega_1^4}{(1 + \omega_1^2)^2} - \gamma = 2\Gamma(b - a) \frac{\omega_1^2}{1 + \omega_1^2} \quad (\text{D.12a})$$

$$\frac{b \omega_2^4}{(1 + \omega_2^2)^2} - \gamma = -2\Gamma(b - a) \frac{\omega_2^2}{1 + \omega_2^2} \quad , \quad (\text{D.12b})$$

sowie

$$\frac{b \omega_1^2 \omega_2^2}{(1 + \omega_1^2)(1 + \omega_2^2)} - \gamma = 0 \quad . \quad (\text{D.13})$$

Anhang E

Entartete Störungstheorie

Mit Hilfe der Notation $e^{inkx} \rightarrow |n\rangle$ definieren wir einen Operator

$$H = H_0 + H_1 + H_2 \quad , \quad (\text{E.1})$$

dessen einzelne Anteile durch

$$H_0 = \sum_n A_0(n) |n\rangle \langle n| \quad (\text{E.2a})$$

$$H_1 = \sum_n \left(A_1(n) |n+1\rangle \langle n| + A_{-1}(n) |n-1\rangle \langle n| \right) \quad (\text{E.2b})$$

$$H_2 = \sum_n \left(A_2(n) |n+2\rangle \langle n| + A_{-2}(n) |n-2\rangle \langle n| \right) \quad (\text{E.2c})$$

gegeben sind. Die Skalarprodukte $\langle m|H|n\rangle$ liefern dann gerade die Elemente der Matrix (6.53). P sei der Projektor auf den Unterraum des entarteten Eigenwerts Null:

$$P = |1\rangle \langle 1| + |-1\rangle \langle -1| \quad Q = 1 - P \quad . \quad (\text{E.3})$$

Schließlich definieren wir noch den Operator

$$M_0(\sigma) = PH_1Q \frac{1}{QH_0Q - \sigma} QH_1P \quad . \quad (\text{E.4})$$

Im Rahmen der entarteten Störungstheorie [Mess] wird gezeigt, dass sich die Aufspaltung des Eigenwerts bis zur Ordnung ε^2 vermöge der Gleichung

$$\det \mathbf{G}(\sigma) = 0 \quad (\text{E.5})$$

mit der (2×2) -Matrix

$$G_{mn}(\sigma) = \langle m|H|n\rangle - \langle m|M_0(\sigma)|n\rangle - \sigma \delta_{mn} \quad m, n = \pm 1 \quad (\text{E.6})$$

berechnen lässt. Die einzelnen Anteile dieser Matrix ergeben sich unter Ausnutzung von Symmetrierelationen $A_0(-1) = A_0(1)$, $A_{-1}(0) = A_1(0)$ etc. wie folgt:

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} A_0(1) & A_2(-1) \\ A_2(-1) & A_0(1) \end{pmatrix} \quad \mathbf{M}_0(\sigma) = \begin{pmatrix} f(\sigma) & g(\sigma) \\ g(\sigma) & f(\sigma) \end{pmatrix} \quad . \quad (\text{E.7})$$

Dabei wurden die Abkürzungen

$$f(\sigma) = \frac{A_{-1}(0)A_1(-1)}{A_0(0) - \sigma} + \frac{A_1(-2)A_{-1}(-1)}{A_0(-2) - \sigma} \quad g(\sigma) = \frac{A_1(0)A_1(-1)}{A_0(0) - \sigma} \quad . \quad (\text{E.8})$$

eingeführt. Die Auswertung der Bestimmungsgleichung (E.5) liefert knapp oberhalb der Soft-Mode Linie $\Gamma = 0$ mit den Ausdrücken (6.44) und (6.51) nach einiger Rechnung für den kritischen Zweig des aufgespaltenen Eigenwerts das Resultat

$$\sigma_+ = -\frac{2\varepsilon^2(1+k_c^2)}{1+\gamma+(1-a)k_c^2} \left(3 + \beta u_2 + \frac{(2\beta)^2}{C_0(k_c)(b-a)} \right) \quad . \quad (\text{E.9})$$

Hierbei sind noch $C_0(k_c) = -k_c^4$ und der Koeffizient u_2 aus (6.33) in nullter Ordnung ($\omega_1 = \omega_2 = k_c$) einzusetzen:

$$u_2 = -\frac{2}{9} \cdot \frac{\beta^2}{b-a} \cdot \frac{1+4k_c^2}{k_c^4} \quad (\text{E.10})$$

Außerdem gilt an der Schwelle $\Gamma = 0$ wegen (D.2) die Beziehung

$$\frac{b}{b-a} = (1+k_c^2)^2 \quad . \quad (\text{E.11})$$

Mit der offensichtlichen Abkürzung N_0 nimmt der Ausdruck (E.9) somit folgende Gestalt an:

$$\sigma_+ = -\varepsilon^2 N_0 \left(3 - \frac{2}{9} \cdot \frac{\beta^2}{b k_c^4} (1+k_c^2)^2 (19+4k_c^2) \right) \quad . \quad (\text{E.12})$$

Anhang F

Kubischer Koeffizient der Ginzburg-Landau Gleichung

Wir schreiben die Gleichungen (3.2) in der Form $\partial_t \Phi = \mathcal{L}\Phi + \mathcal{N}[\Phi]$ mit

$$\Phi = \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \quad \mathcal{L} = \begin{pmatrix} -\gamma & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -a & b \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \partial_x^2 \quad (\text{F.1})$$

und

$$\mathcal{N}[\Phi] = \begin{pmatrix} -\beta \Phi_1^2 - \Phi_1^3 \\ 0 \end{pmatrix} . \quad (\text{F.2})$$

In der von Just [Just] für eine allgemeine Nichtlinearität verwendeten Notation

$$\mathcal{N}[\Phi] = \mathcal{N}_2[\Phi] + \mathcal{N}_3[\Phi] + \dots \quad (\text{F.3})$$

mit

$$\mathcal{N}_2[\Phi] = \sum_{\alpha\beta} C^{(\alpha\beta)} \left\{ \frac{\partial^\alpha \Phi}{\partial x^\alpha}, \frac{\partial^\beta \Phi}{\partial x^\beta} \right\} \quad \mathcal{N}_3[\Phi] = \sum_{\alpha\beta\gamma} D^{(\alpha\beta\gamma)} \left\{ \frac{\partial^\alpha \Phi}{\partial x^\alpha}, \frac{\partial^\beta \Phi}{\partial x^\beta}, \frac{\partial^\gamma \Phi}{\partial x^\gamma} \right\} \quad (\text{F.4})$$

sowie

$$(C^{(\alpha\beta)} \{f, g\})_i = \sum_{jk} c_{ijk}^{(\alpha\beta)} f_j g_k \quad (D^{(\alpha\beta\gamma)} \{f, g, h\})_i = \sum_{jkl} d_{ijkl}^{(\alpha\beta\gamma)} f_j g_k h_l \quad (\text{F.5})$$

gilt für die von Null verschiedenen Koeffizienten dann einfach

$$c_{111}^{(00)} = -\beta \quad d_{1111}^{(000)} = -1 \quad . \quad (\text{F.6})$$

Die Matrix $\mathbf{L}(k)$, die das Eigenwertproblem des linearen Anteils bestimmt, ist bereits in (3.7) angegeben. Wir benötigen im Folgenden die Ausdrücke

$$\mathbf{L}(k_c) = - \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \quad \mathbf{L}(0) = - \begin{pmatrix} F & 0 \\ 0 & G \end{pmatrix} \quad \mathbf{L}(2k_c) = - \begin{pmatrix} P & Q \\ R & S \end{pmatrix} \quad (\text{F.7})$$

mit den Abkürzungen:

$$\begin{aligned}
A &= \gamma - a k_c^2 & P &= \gamma - 4 a k_c^2 \\
B &= b k_c^2 & F &= \gamma & Q &= 4 b k_c^2 \\
C &= -k_c^2 & G &= 1 & R &= -4 k_c^2 \\
D &= 1 + k_c^2 & S &= 1 + 4 k_c^2
\end{aligned} \tag{F.8}$$

Auf der Bifurkationslinie, wo die Ausdrücke später auszuwerten sind, ist für a und γ noch die Parameterdarstellung (3.16) einzusetzen. Dort gilt nach Voraussetzung:

$$\det(\mathbf{L}(k_c)) = A D - B C = 0 \quad . \tag{F.9}$$

Die Rechts- und Linkseigenvektoren von $\mathbf{L}(k_c)$ lassen sich dann wie folgt darstellen:

$$\mathbf{u}_c = \frac{1}{N_1} \begin{pmatrix} B \\ -A \end{pmatrix} \quad \mathbf{v}_c = \frac{1}{N_2} \begin{pmatrix} C \\ -A \end{pmatrix} \quad , \tag{F.10}$$

mit den Normierungsfaktoren¹

$$N_1 = \sqrt{A^2 + B^2} \quad N_2 = \sqrt{A^2 + C^2} \quad . \tag{F.11}$$

Nach Just berechnen wir jetzt die Hilfsgrößen

$$\mathbf{\Gamma}_a = -\mathbf{L}(0)^{-1} \sum_{\alpha\beta} (ik_c)^\alpha (-ik_c)^\beta \mathbf{C}^{(\alpha\beta)} \{\mathbf{u}_c, \mathbf{u}_c^*\} \tag{F.12a}$$

$$\mathbf{\Gamma}_b = -\mathbf{L}(2k_c)^{-1} \sum_{\alpha\beta} (ik_c)^\alpha (ik_c)^\beta \mathbf{C}^{(\alpha\beta)} \{\mathbf{u}_c, \mathbf{u}_c\} \tag{F.12b}$$

$$\mathbf{\Gamma} = 2 \sum_{\alpha} (ik_c)^\alpha \mathbf{C}^{(\alpha 0)} \{\mathbf{u}_c, 2\mathbf{\Gamma}_a\} + 2 \sum_{\alpha\beta} (-ik_c)^\alpha (2ik_c)^\beta \mathbf{C}^{(\alpha\beta)} \{\mathbf{u}_c^*, \mathbf{\Gamma}_b\} \tag{F.12c}$$

$$\mathbf{\Delta} = 3 \sum_{\alpha\beta\gamma} (ik_c)^\alpha (ik_c)^\beta (-ik_c)^\gamma \mathbf{D}^{(\alpha\beta\gamma)} \{\mathbf{u}_c, \mathbf{u}_c, \mathbf{u}_c^*\} \quad . \tag{F.12d}$$

Natürlich ergibt sich in unserem speziellen Fall eine beträchtliche Vereinfachung, da nur die Beiträge $\alpha, \beta, \gamma = 0$ übrig bleiben und die Eigenvektoren reell sind ($\mathbf{u}_c^* = \mathbf{u}_c$). Man erhält:

$$N_1^2 \mathbf{\Gamma}_a = -\frac{\beta B^2}{F} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{F.13a}$$

$$N_1^2 \mathbf{\Gamma}_b = -\frac{\beta B^2}{PS - QR} \begin{pmatrix} S \\ -R \end{pmatrix} \tag{F.13b}$$

$$N_1^3 \mathbf{\Gamma} = \frac{2\beta^2 B^3}{F} \cdot \frac{2PS - 2QR + FS}{PS - QR} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{F.13c}$$

$$N_1^3 \mathbf{\Delta} = -3 B^3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad . \tag{F.13d}$$

¹Die Normierung bewirkt, dass die Vektoren auch im Grenzfall $k_c \rightarrow 0$ endlich bleiben.

Der kubische Koeffizient r der Ginzburg-Landau Gleichung (6.57) ist schließlich durch

$$r = \frac{(\mathbf{v}_c | \mathbf{\Gamma} + \mathbf{\Delta})}{(\mathbf{v}_c | \mathbf{u}_c)} \quad (\text{F.14})$$

gegeben, wobei $(\mathbf{f} | \mathbf{g})$ das Skalarprodukt zwischen den Vektoren \mathbf{f} und \mathbf{g} bezeichnet. Wir schreiben das Ergebnis in der Form

$$r = \frac{r_1 + r_2}{N^2 \rho} \quad (\text{F.15})$$

mit

$$r_1 = -\frac{2 \beta^2 B^3 C}{F} \cdot \frac{2 PS - 2 QR + FS}{PS - QR} \quad (\text{F.16a})$$

$$r_2 = 3 B^3 C \quad (\text{F.16b})$$

$$\rho = -(A^2 + B C) \quad (\text{F.16c})$$

$$N^2 = A^2 + B^2 \quad . \quad (\text{F.16d})$$

Die Auswertung auf der Soft-Mode Linie liefert mit (3.16) und (F.8):

$$r_1 = \frac{2}{9} b^2 \beta^2 k_c^4 (1 + k_c^2)^2 (19 + 4 k_c^2) \quad (\text{F.17a})$$

$$r_2 = -3 b^3 k_c^8 \quad (\text{F.17b})$$

$$\rho = \frac{b k_c^4}{(1 + k_c^2)^2} (1 + 2 k_c^2 + (1 - b) k_c^4) \quad (\text{F.17c})$$

$$N^2 = \frac{b^2 k_c^4}{(1 + k_c^2)^2} (1 + 2 k_c^2 (1 + k_c^2)) \quad . \quad (\text{F.17d})$$

Anhang G

Lösungen der kubischen Gleichung knapp oberhalb der Schwelle

Durch die Transformation

$$\bar{\gamma} = 4 + \frac{10}{3}x \quad (\text{G.1})$$

verlegen wir die Koordinaten $\bar{\gamma} = \frac{2}{3}$ (Symmetrielinie) und $\bar{\gamma} = 4$ (Punkt S') nach $x = -1$ bzw. $x = 0$. Damit gilt für die Koeffizienten der kubischen Gleichung (7.9a):

$$P = -1 - \frac{2}{3}x - \frac{2}{5}\bar{\delta} \quad Q = 1 + x \quad . \quad (\text{G.2})$$

Auf der Soft-Mode Linie sm_1 (mit $\bar{\delta} = 0$) nehmen die Lösungen Y_1 und Y_2 gemäß (7.14) die Form

$$Y_1 = \frac{1}{2}(\sqrt{9 + 8x} - 1) \quad Y_2 = 1 \quad (\text{G.3})$$

an. Entwickelt man für $0 < \bar{\delta} \ll 1$ die kubische Gleichung um eine dieser beiden Lösungen, sprich $Y = Y_i + z$ (mit $i = 1, 2$), so folgt für die Abweichung z in quadratischer Ordnung:

$$3Y_i z^2 + (3Y_i^2 - 2x - 3)z - \frac{6}{5}\bar{\delta}Y_i = 0 \quad . \quad (\text{G.4})$$

Im Fall $i = 2$ ergibt sich daraus sofort für alle x :

$$Y = 1 + z = 1 + \frac{1}{3}\left(x \pm \sqrt{x^2 + \frac{18}{5}\bar{\delta}}\right) \quad . \quad (\text{G.5})$$

Für $i = 1$ kann man (G.4) wegen $Y_1^2 + Y_1 - 2(1 + x) = 0$ auch in der Form

$$Y_1 z^2 - (Y_1 - 1 - \frac{4}{3}x)z - \frac{2}{5}\bar{\delta}Y_1 = 0 \quad (\text{G.6})$$

schreiben und erhält somit (ebenfalls für alle x)

$$z = \frac{1}{2Y_1}\left((Y_1 - 1 - \frac{4}{3}x) \pm \sqrt{(Y_1 - 1 - \frac{4}{3}x)^2 + \frac{8}{5}\bar{\delta}Y_1^2}\right) \quad . \quad (\text{G.7})$$

In der Nähe von $x = 0$, genauer gesagt in einer $\sqrt{\bar{\delta}}$ -Umgebung, folgen nun wegen $Y_1 = 1 + \frac{2}{3}x + \dots$ in Übereinstimmung mit (G.5) die beiden aufgespaltenen Lösungszweige

$$Y = Y_1 + z = 1 + \frac{1}{3} \left(x \pm \sqrt{x^2 + \frac{18}{5} \bar{\delta}} \right) \quad . \quad (\text{G.8})$$

Macht man die Verschiebung (G.1) rückgängig, so ergibt sich der Verlauf aus Abbildung 7.2. Betrachten wird noch kurz die Amplitude $g = \frac{2}{3}\beta G$ der periodischen Zustände, die durch (7.9b) festgelegt ist. Im Fall des negativen Vorzeichens in (G.5) bzw. (G.8) ist $G^2 \sim \sqrt{\bar{\delta}}$ im Bereich $x \approx 0$. Für $x \gg \sqrt{\bar{\delta}}$ hingegen wird $G^2 \sim \bar{\delta}$. Für endliche negative x wird schließlich auch $G^2 \approx 1 - Y_1^2$ endlich. Der andere Zweig (positives Vorzeichen) führt immer auf $G^2 < 0$ und scheidet daher aus.

Literaturverzeichnis

- [BeLe] L.A. Belyakov, L.M. Lerman: *Generalized 1D Swift-Hohenberg Equation: Localized and Periodic Patterns, Travelling Fronts*, unveröffentlichtes Manuskript, auf Anfrage erhältlich bei: lerman@unn.ac.ru (2002) [5](#), [43](#)
- [BGL] L.A. Belyakov, L.Y. Glebsky, L.M. Lerman: *Abundance of Stable Stationary Localized Solutions to the Generalized 1D Swift-Hohenberg Equation*, Computers Math. Applic. **34**, 253 (1997) [43](#)
- [CoEc] P. Collet, J.-P. Eckmann: *Instabilities and Fronts in Extended Systems*, Princeton University Press 1990 [58](#)
- [Coul] P. Coullet: *Localized Patterns and Fronts in Nonequilibrium Systems*, Intern. J. Bifurcation and Chaos **12**, 2445 (2002) [5](#)
- [CrHo] M.C. Cross, P.C. Hohenberg: *Pattern formation outside of equilibrium*, Rev. Mod. Phys. **65**, 851 (1993) [3](#), [62](#)
- [CrNe] M.C. Cross, A.C. Newell: *Convection patterns in large aspect ratio systems*, Physica **D 10**, 299 (1984) [4](#)
- [Dewe] G. Dewel et al.: *Pattern selection and localized structures in reaction-diffusion systems*, Physica **A 213**, 181 (1995) [4](#)
- [Eckh] W. Eckhaus: *Studies in Nonlinear Stability Theory*, Springer, New York 1965 [5](#)
- [EcPr] J.-P. Eckmann, I. Procaccia: *Spatio-Temporal Chaos*, Lecture Notes for „Chaos, Order and Patterns“, Como 1990, herausgegeben von Artuso, Cvitanović, Casati: Nato ASI Series, Plenum (1992) [58](#)
- [GiLe95] L.Y. Glebsky, L.M. Lerman: *On small stationary localized solutions for the generalized 1D Swift-Hohenberg equation*, Chaos: Interdisc. J. Nonlinear Sci. **5**, 424 (1995) [5](#), [43](#)
- [GiLe97] L.Y. Glebsky, L.M. Lerman: *Instability of small stationary localized solutions to a class of reversible 1+1 PDEs*, Nonlinearity **10**, 389 (1997) [43](#)

- [Gold] H. Goldstein: *Klassische Mechanik*, Aula-Verlag, Wiesbaden 1989 42
- [GoSc] M. Golubitsky, D.G. Schaeffer: *Singularities and Groups in Bifurcation Theory*, Springer, New York 1985 5
- [GuHo] J. Guckenheimer, P. Holmes: *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*, Springer, New York 1986 5, 8, 9, 20
- [JMS] W. Just, F. Matthäus, H. Sauermann: *On the degenerated soft mode instability*, J. Phys. **A 31**, 5925 (1998) 65
- [Just] W. Just et al.: *Weakly nonlinear analysis in spatially extended systems as a formal perturbation scheme*, preprint verfügbar über <http://de.arXiv.org/abs/patt-sol/9706006> 63, 96
- [Kida] H. Kidachi: *On Mode Interactions in Reaction Diffusion Equation with Nearly Degenerate Bifurcations*, Prog. Theor. Phys. **63**, 1152 (1980) 4
- [KiSt] U. Kirchgraber, E. Stiefel: *Methoden der analytischen Störungsrechnung und ihre Anwendungen*, Teubner, Stuttgart 1978 53, 58
- [Kugl] J. Kugler: *Amplitudengleichungen für Bifurkationen der Kodimension Zwei: Ein Fallbeispiel*, Diplomarbeit, Darmstadt 1997 20
- [LMN94] J. Lega, J.V. Moloney, A.C Newell: *Swift-Hohenberg Equation for Lasers*, Phys. Rev. **E 73**, 2978 (1994) 5
- [LMN95] J. Lega, J.V. Moloney, A.C Newell: *Universal description of laser dynamics near threshold*, Physica **D 83**, 478 (1995) 5
- [Mann] P. Manneville: *Dissipative Structures and Weak Turbulence*, Academic Press, San Diego 1990 37, 62
- [Matt] F. Matthäus: *Analyse von Bifurkationen höherer Kodimension eines getriebenen Ferromagneten*, Dissertation, Darmstadt 1997 4, 65
- [Mess] A. Messiah: *Quantenmechanik, Band 2*, Walter de Gruyter, Berlin 1990 94
- [NaMo] A.H. Nayfeh, D.T. Mook: *Nonlinear Oscillations*, John Wiley 1979 67
- [Nayf] A.H. Nayfeh: *Perturbation Methods*, John Wiley 1973 53
- [Newe] A.C. Newell: *Envelope Equations*, Lectures in Applied Mathematics **15**, 157 (1974) 4
- [NeWh] A.C. Newell, J.A. Whitehead: *Finite bandwidth, finite amplitude convection*, J. Fluid Mech. **38**, 279 (1969) 4

- [SaHo] W. van Saarloos, P.C. Hohenberg: *Fronts, pulses, sources and sinks in generalized complex Ginzburg-Landau equations*, Physica **D** **56**, 303 (1992). Erratum: Physica **D** **69**, 209 (1993) [5](#)
- [SwHo] J. Swift, P.C. Hohenberg: *Hydrodynamic fluctuations at the convective instability*, Phys. Rev. **A** **15**, 319 (1977) [5](#), [37](#)
- [Tema] R. Temam: *Infinite-Dimensional Systems in Mechanics and Physics*, Springer, New York 1988 [63](#)
- [TML] M. Tlidi, P. Mandel, R. Lefever: *Localized Structures and Localized Patterns in Optical Bistability*, Phys. Rev. Lett. **73**, 640 (1994) [5](#)
- [Wolf] S. Wolfram: *The Mathematica Book, Fourth Edition*, Cambridge University Press 1999 [46](#), [56](#)

Danksagung

Mein besonderer Dank gilt Herrn Prof. Dr. H. Sauermann für die Vergabe des Themas und seinen steten Zuspruch. Seine Ideen und tatkräftige Unterstützung haben wesentlich zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen.

Herrn Dr. H. Turschner möchte ich für seine immer währende Einsatzbereitschaft und Ausdauer bei der Bewältigung vieler Probleme danken. Die zahllosen Stunden gemeinsamer Diskussion waren mir stets ein Vergnügen.

Weiterhin bedanke ich mich bei allen Mitgliedern unserer Arbeitsgruppe für ihre Hilfsbereitschaft und die entspannte und freundschaftliche Atmosphäre.

Nicht zuletzt möchte ich meinen Eltern danken, die mir Studium und Promotion ermöglicht haben.

Lebenslauf

Persönliche Daten

Name:	Jörg Kugler
Geburtsdatum:	24.04.1970
Geburtsort:	Offenbach am Main
Familienstand:	ledig
Staatsangehörigkeit:	deutsch

Ausbildung

1976 – 1980	Gartenstadtschule in Rodgau (Grundschule)
1980 – 1986	Heinrich-Böll-Schule in Rodgau (Gesamtschule)
1986 – 1989	Claus-von-Stauffenberg-Schule in Rodgau (gymnasiale Oberstufenschule)
Mai 1989	Abitur
1989 – 1997	Verpflichtung im Katastrophenschutz beim Technischen Hilfswerk in Neu-Isenburg
1989 – 1997	Physikstudium an der TU Darmstadt
Herbst 1991	Vordiplom
1996 – 1997	Diplomarbeit unter der Anleitung von Prof. Dr. H. Sauermann
März 1997	Diplom
1997 – 2002	Wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Festkörperphysik der TU Darmstadt

Erklärung

Ich erkläre hiermit, dass ich die vorliegende Arbeit selbständig und nur unter Verwendung der angegebenen Hilfsmittel angefertigt habe.

Ich habe bisher noch keinen Promotionsversuch unternommen.

Darmstadt, im Februar 2003